Колебательный контур

В.МОЖАЕВ

В этой статье будут разобраны задачи, в которых основным элементом является колебательный LC-контур. В состав такого контура обычно входят два реактивных элемента – индуктивность и емкость, а также активное сопротивление. Последовательно соединенные, эти элементы и образуют последовательный колебательный контур. Основная задача при расчете колебательного контура состоит в определении временнóй зависимости тока в контуре и напряжений на его элементах при заданных начальных условиях.

Процессы в колебательном контуре описываются так называемым дифференциальным уравнением второго порядка, а общее решение этого уравнения содержит две неизвестные константы. Эти константы можно определить из начальных условий, вот почему для нахождения решения необходимо знать начальный ток в контуре и начальное напряжение, скажем, на конденсаторе.

Часто в задачах на колебательный контур требуется найти не общее решение, а какой-то конкретный параметр, например максимальный ток в контуре или максимальное напряжение на конденсаторе. Такие задачи можно решать, исходя из закона сохранения энергии и общих физических соображений. Так, при максимальном токе в контуре ЭДС индукции в катушке равна нулю, а если активное сопротивление контура равно нулю, то и напряжение на конденсаторе также равно нулю. Или, если напряжение на конденсаторе максимально, то ток в контуре отсутствует.

А теперь – конкретные задачи.

Задача 1. *В колебательном LC-контуре (рис.1) в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0. Найдите зависимости напряжения на конденсаторе и тока в контуре от времени после замыкания ключа.*

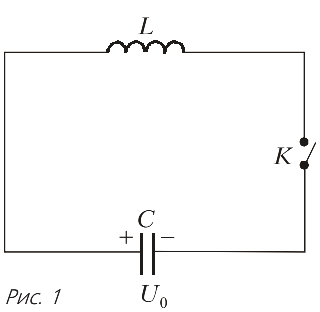

Рис. 1

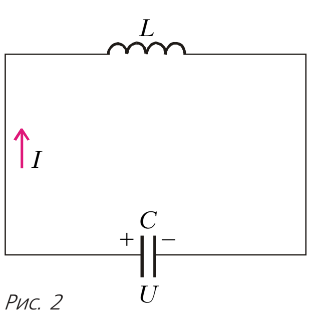

Рис. 2

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе $U(0) = U_0$, а ток в контуре $I(0) = 0$. Пусть в произвольный момент времени после замыкания ключа в контуре течет ток, как это изображено на рисунке 2. Запишем закон Ома для нашего контура:

$$LI' = U .$$

Поскольку $I = -CU'$, получим

$$U'' + \frac{1}{LC}U = 0 .$$

Это – однородное (справа стоит ноль) дифференциальное уравнение второго порядка (старшая производная второго порядка). Уравнения такого вида описывают гармонические колебания одного из параметров колебательной системы. В нашем случае –напряжения на конденсаторе. Решение уравнения имеет вид

$$U(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t ,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебаний контура, а A и B – константы, которые находятся из начальных условий. Первое начальное условие – это

$$U(0) = U_0 .$$

После подстановки его в решение получим $A = U_0$. Из второго начального условия

$$I(0) = -CU' = 0$$

следует, что $B = 0$.

Теперь запишем окончательные выражения для напряжения на конденсаторе:

$$U(t) = U_0\cos\omega_0 t$$

и для тока в контуре:

$$I(t) = U_0\omega_0 C\sin\omega_0 t .$$

Сравнивая последние два выражения, видим, что напряжение на конденсаторе и ток в контуре изменяются по гармоническому закону с одной и той же частотой, но колебания тока и напряжения сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Зависимости $U(t)$ и $I(t)$ изображены на рисунке 3.

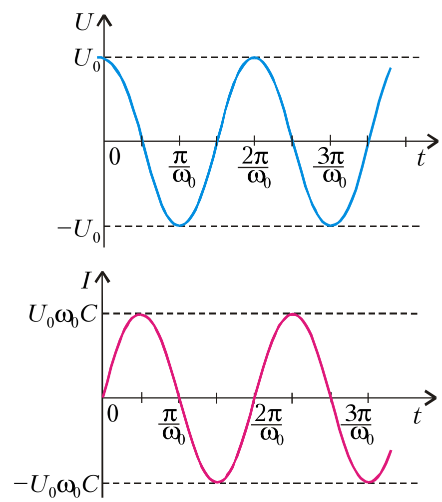

Рис. 3

Задача 2. *К LC-контуру (рис.4) в момент $t = 0$ подключают источник постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Определите напряжение на конденсаторе в зависимости от времени.*

Рассмотрим произвольный момент после замыкания ключа. Пусть в контуре течет ток I, как это изображено на рисунке 5. Запишем закон Ома для нашего контура:

$$\mathcal{E} - LI' = U_C ,$$

где U_C – напряжение на конденсаторе. Используем связь между током и напряжением на конденсаторе:

$$I = CU_C' .$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$I' = CU_C'' .$$

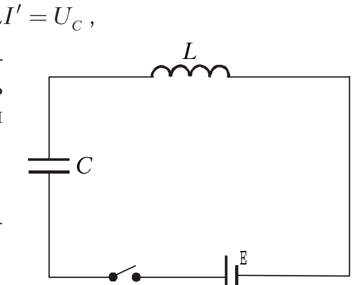

Рис. 4

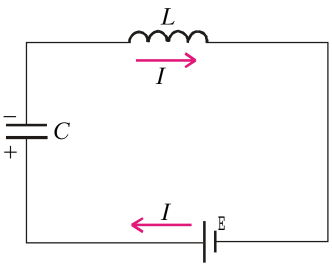

Рис. 5

Подставляя выражение для I' в уравнение закона Ома, получим

$$U_C'' + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 \mathcal{E},$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота контура. Это уравнение является неоднородным (справа не ноль) линейным дифференциальным уравнением второго порядка (по старшей производной). Ранее, в задаче 1, мы имели дело с аналогичным уравнением, только с нулевой правой частью. Сделав замену переменной: $X = U_C - \mathcal{E}$, сведем наше неоднородное уравнение к однородному:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0.$$

Решение такого уравнения мы уже знаем:

$$X = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

Для определения констант A и B используем наши начальные условия: при $t = 0$ $U_C = 0$, или $X = -\mathcal{E}$, и $I = CU_C' = 0$, или $X' = 0$. Подстановка начальных условий в решение позволяет найти A и B:

$$A = -\mathcal{E},\ B = 0.$$

Окончательно получим

$$X(t) = -\mathcal{E}\cos\omega_0 t,$$

или

$$U_C(t) = \mathcal{E}(1 - \cos\omega_0 t).$$

Изменение напряжения на конденсаторе будет происходить по гармоническому закону (рис.6), но, в отличие от предыдущей задачи, не относительно нулевого уровня, а относительно уровня $U_C = \mathcal{E}$.

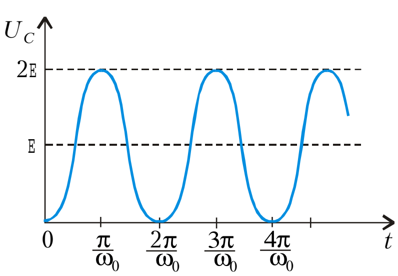

Рис. 6

Задача 3. *В колебательном LC-контуре, изображенном на рисунке 7, при разомкнутом ключе K заряд на конденсаторе емкостью C_1 равен q_0, а конденсатор емкостью C_2 не заряжен. Через какое время после замыкания ключа заряд на конденсаторе емкостью C_2 будет иметь максимальное значение? Чему будет равен этот заряд? Омическими потерями в катушке индуктивности пренебречь.*

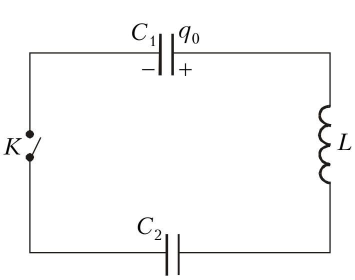

Рис. 7

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. Пусть в этот момент заряд на первом конденсаторе q_1, на втором конденсаторе q_2 и в контуре течет ток I (рис.8). Поскольку нас интересует заряд $q_{2\max}$, разумно найти зависимость $q_2(t)$. Для этого запишем закон Ома для нашего контура:

$$-LI' = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_2}.$$

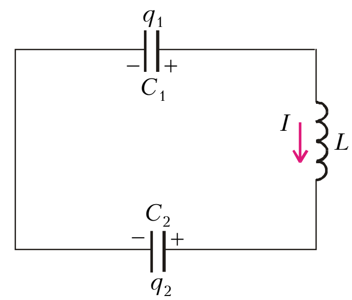

Рис. 8

Поскольку $I = q_2'$, а $q_1 + q_2 = q_0$, уравнение относительно q_2 будет иметь вид

$$q_2'' + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} q_2 = \frac{q_0}{LC_1}.$$

Введем новую переменную:

$$X = q_2 - \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2},$$

запишем для нее уравнение колебаний:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}$ – собственная частота контура, и его решение:

$$X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

При $t = 0$ $q_2 = 0$, или $X(0) = -\dfrac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}$, и $I = 0$, или $X' = 0$. Начальные условия позволяют найти константы A и B:

$$A = -\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2},\ B = 0.$$

Решение уравнения колебаний имеет вид

$$X(t) = -\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}\cos\omega_0 t,$$

или, переходя обратно к переменной q_2,

$$q_2(t) = \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}(1 - \cos\omega_0 t).$$

Очевидно, что первый раз заряд q_2 достигнет максимального значения через время $t_1 = \pi/\omega_0$, затем это максимальное значение будет повторяться с периодом $T = 2\pi/\omega_0$. В общем случае это можно записать в виде

$$t_N = \frac{\pi}{\omega_0}(1 + 2N),\ \text{где}\ N = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

Величина максимального заряда на втором конденсаторе равна

$$q_{2\max} = \frac{2q_0 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Задача 4. *В схеме, изображенной на рисунке 9, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C не заряжен. Ключ K на некоторое время замыкают, а затем снова размыкают. Определите ток через катушку индуктивности в момент размыкания ключа, если после размыкания ключа максимальное напряжение на конденсаторе оказалось равным $2\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС батареи. Омическим сопротивлением катушки пренебречь. Внутреннее сопротивление батареи настолько мало, что время зарядки конденсатора (при замкнутом ключе) много меньше времени, в течение которого ключ K остается замкнутым.*

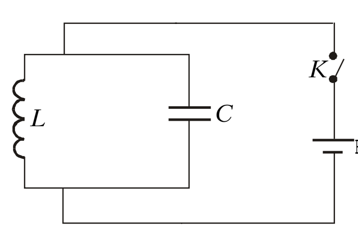

Рис. 9

Сразу после замыкания ключа конденсатор быстро зарядится до напряжения, равного ЭДС батареи, а в катушке индуктивности будет медленно нарастать ток, начиная с нулевого значения. В момент размыкания ключа напряжение на конденсаторе будет равно ЭДС батареи $\mathcal{E}$, а через катушку будет течь ток, который мы обозначим I_0. Это будут начальные условия для нашего LC-контура.

Пусть в произвольный момент времени (после размыкания ключа) в контуре течет ток I, а напряжение на конденсаторе равно U_C, как это изображено на рисунке 10. Запишем закон Ома для данного контура:

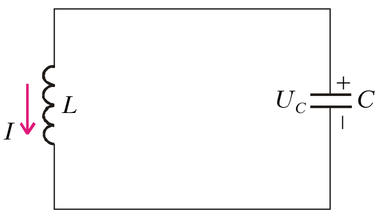

Рис. 10

$$LI' = U_C,$$

или, поскольку $I = -CU'$,

$$U_C'' + \omega_0^2 U_C = 0,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Решение данного уравнения будем искать в виде

$$U_C(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Эта форма записи решения эквивалентна используемой ранее. Там мы имели две константы A и B, и в данном случае также две константы: A и φ. Используя начальные условия $U_C(0) = \mathcal{E}$ и $I(0) = I_0$, получим $\mathcal{E} = A\cos\varphi$, $I_0 = AC\omega_0 \sin\varphi$. Отсюда

$$A = \sqrt{\mathcal{E}^2 + \left(\frac{I_0}{C\omega_0}\right)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{I_0}{\mathcal{E}C\omega_0}.$$

Поскольку A является амплитудой колебаний напряжения на конденсаторе, эта величина и есть максимальное напряжение на нем. Следовательно, $\sqrt{\mathcal{E}^2 + \left(\frac{I_0}{C\omega_0}\right)^2} = 2\mathcal{E}$, откуда

$$I_0 = \sqrt{3}\mathcal{E}C\omega_0 = \mathcal{E}\sqrt{3\frac{C}{L}}.$$

Как в предыдущих трех задачах, так и при решении этой задачи мы использовали общий принцип решения, который позволяет получить полную информацию о контуре. Теперь приведем упрощенное решение, исходя из общих физических соображений и закона сохранения энергии. Запишем закон сохранения энергии для момента времени $t = 0$ и для того момента, когда напряжение на конденсаторе максимально и ток в контуре равен нулю:

$$\frac{LI_0^2}{2} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{4C\mathcal{E}^2}{2},$$

откуда и найдем искомый ток:

$$I_0 = \mathcal{E}\sqrt{3\frac{C}{L}}.$$

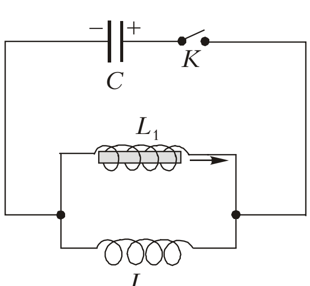

Рис. 11

Задача 5. *В схеме на рисунке 11 конденсатор емкостью C заряжен до некоторого напряжения, а ключ K разомкнут. После замыкания ключа в схеме происходят свободные колебания, при которых амплитудное значение тока в катушке индуктивностью L_2 равно I_0. Когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает максимального значения, из нее быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний) выдвигают сердечник, что приводит к уменьшению ее индуктивности в k раз. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе после выдвижения сердечника.*

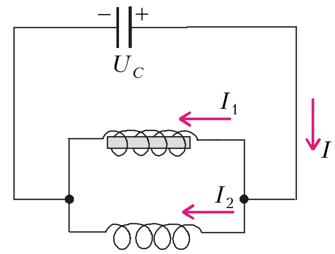

Рис. 12

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа K, но до выдвижения сердечника. Обозначим начальное напряжение на конденсаторе U_{C0}, напряжение в произвольный момент времени U_C. Пусть через катушку индуктивностью L_1 течет ток I_1, а через катушку индуктивностью L_2 – ток I_2 (рис.12). Запишем закон Ома для контура, включающего в себя конденсатор и катушку индуктивностью L_2:

$$L_2 I_2' = U_C. \tag{1}$$

Закон Ома для контура, охватывающего обе катушки, имеет вид

$$L_1 I_1' = L_2 I_2',$$

или

$$(L_1 I_1 - L_2 I_2)' = 0.$$

Отсюда получим

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = \text{const},$$

или, поскольку начальные токи через катушки равны нулю,

$$L_1 I_1 = L_2 I_2.$$

Из условия непрерывности тока следует, что

$$I = I_1 + I_2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1} I_2. \tag{2}$$

Продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$L_2 I_2'' = U_C'.$$

Поскольку $I = -CU_C'$, уравнение приобретает вид

$$L_2 I_2'' + \frac{1}{C} I = 0.$$

Подставив сюда выражение (2), окончательно получим

$$I_2'' + \frac{L_1 + L_2}{CL_1L_2} I_2 = 0.$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$I_2(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{CL_1L_2}}$. Поскольку $I_2(0) = 0$, получим $A = 0$. Для нахождения константы B воспользуемся тем фактом, что амплитудное значение тока в катушке индуктивностью L_2 равно I_0, и получим $B = I_0$. Тогда зависимости токов от времени имеют вид

$$I_2(t) = I_0 \sin\omega_0 t \quad \text{и} \quad I_1(t) = \frac{L_2}{L_1} I_0 \sin\omega_0 t.$$

За время удаления сердечника из первой катушки магнитные потоки в обеих катушках не изменятся. Это приведет к тому, что ток во второй катушке сохранится:

$$I_2^* = I_0.$$

Ток I_1^* в первой катушке найдем из условия $L_2 I_0 = \frac{L_1}{k} I_1^*$:

$$I_1^* = \frac{kL_2}{L_1} I_0 .$$

Для определения максимального напряжения на конденсаторе воспользуемся законом сохранения энергии. Магнитная энергия, запасенная в катушке сразу после удаления сердечника, равна

$$W_L = \frac{L_1 \left(I_1^*\right)^2}{2k} + \frac{L_2 \left(I_2^*\right)^2}{2} =$$
$$= \frac{L_1}{2k}\left(\frac{kL_2}{L_1} I_0\right)^2 + \frac{L_2 I_0^2}{2} = \frac{L_2 I_0^2}{2}\left(1 + \frac{kL_2}{L_1}\right).$$

Когда напряжение на конденсаторе максимально, общий ток в контуре равен нулю, т.е. токи через катушки связаны соотношением

$$I_1^{**} + I_2^{**} = 0.$$

Ранее полученная связь между токами $(L_1 I_1 - L_2 I_2 = \text{const})$ для токов I_1^{**} и I_2^{**} будет иметь вид

$$\frac{L_1}{k} I_1^{**} - L_2 I_2^{**} = 0.$$

Из последних двух уравнений следует, что токи в катушках будут равны нулю, а вся энергия контура будет сосредоточена в конденсаторе и равна

$$W_C = \frac{CU_m^2}{2},$$

где U_m – максимальное напряжение на конденсаторе. Согласно закону сохранения энергии, $W_L = W_C$, или

$$\frac{L_2 I_0^2}{2}\left(1 + \frac{kL_2}{L_1}\right) = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$U_m = I_0 \sqrt{\frac{L_2 \left(L_1 + kL_2\right)}{CL_1}}.$$

Задача 6. *В колебательном LCR-контуре (рис.13) активное сопротивление R мало, так что колебания в нем затухают слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: в те моменты, когда ток в цепи максимален, катушку индуктивности быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний в контуре) растягивают от длины* l_1 *до длины* l_2*, причем* $l_2 - l_1 \ll l_1$*, а в моменты, когда ток в цепи равен нулю, катушку быстро сжимают до прежнего размера. При каком относительном изменении длины катушки* $(l_2 - l_1)/l_1$ *колебания в контуре не будет затухать? Индуктивность катушки считать обратно пропорциональной ее длине.*

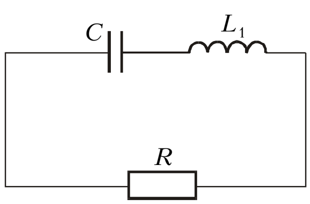

Рис. 13

Рассмотрим момент времени, когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает максимального значения I_{1m} и катушку растягивают до длины l_2, при которой индуктивность равна L_2. Поскольку изменение индуктивности происходит быстро, будет сохраняться магнитный поток, пронизывающий катушку:

$$L_1 I_{1m} = L_2 I_{2m},$$

где I_{2m} – новый ток в катушке после ее удлинения. Так как индуктивность обратно пропорциональна длине катушки,

$$l_2 I_{1m} = l_1 I_{2m} .$$

Отсюда

$$I_{2m} = \frac{l_2}{l_1} I_{1m} .$$

Новая энергия в контуре стала

$$W_2 = \frac{L_2 I_{2m}^2}{2} = \frac{L_2 l_2^2 I_{1m}^2}{2 l_1^2},$$

а первоначальная энергия была

$$W_1 = \frac{L_1 I_{1m}^2}{2} .$$

Приращение энергии в контуре равно

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{L_2 l_2^2}{2 l_1^2} I_{1m}^2 - \frac{L_1}{2} I_{1m}^2 ,$$

или, поскольку $L_2 = \frac{l_1}{l_2} L_1$,

$$\Delta W = \frac{L_1 l_2}{2 l_1} I_{1m}^2 - \frac{L_1}{2} I_{1m}^2 = \frac{L_1 \left(l_2 - l_1\right)}{2 l_1} I_{1m}^2 .$$

Возвращение индуктивности к прежнему значению при нулевом токе в контуре, очевидно, не приводит к изменению энергии – она остается неизменной. Последующая подкачка энергии в контур происходит через время, равное полупериоду колебаний. За это время в контуре происходит потеря энергии в виде выделяющегося в резисторе тепла

$$\Delta W_R = \frac{I_{1m}^2 R}{2} \frac{T}{2} = \pi \sqrt{L_1 C} \frac{I_{1m}^2 R}{2} .$$

Колебания в контуре не будут затухать, если подкачка энергии в контур ΔW будет больше или равна потерям энергии ΔW_R:

$$\frac{L_1 \left(l_2 - l_1\right)}{2 l_1} I_{1m}^2 \geq \pi \sqrt{L_1 C} \frac{I_{1m}^2 R}{2} .$$

Отсюда находим искомую величину относительного изменения длины катушки:

$$\frac{l_2 - l_1}{l_1} \geq \pi R \sqrt{\frac{C}{L_1}} .$$

Упражнения

1. В LC-контуре, изображенном на рисунке 14, при разомкнутом ключе K заряд на конденсаторе емкостью C_1 равен q, а конденсатор емкостью C_2 ($C_2 = 4C_1$) не заряжен. Определите максимальный ток в контуре после замыкания ключа. Омическими потерями в катушке индуктивностью L можно пренебречь.

2. В схеме на рисунке 15 в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C не заряжен. Ключ на некоторое время замыкают, а затем снова размыкают. Определите ток I_0 через катушку индуктивностью L в момент размыкания ключа, если после размыкания ключа максимальный ток

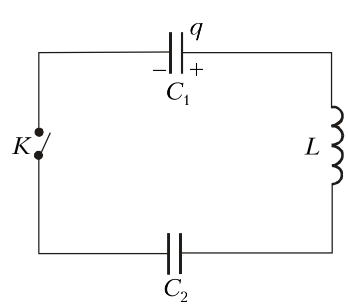

Рис. 14

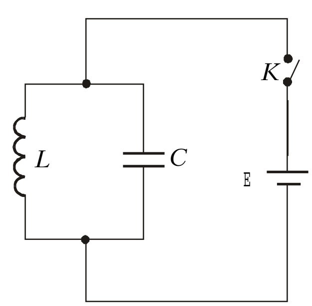

Рис. 15

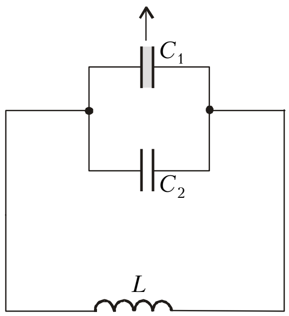

Рис. 16

в LC-контуре оказался равным $2I_0$. Омическим сопротивлением катушки пренебречь. ЭДС источника $\mathcal{E}$.

3. Колебательный контур состоит из двух параллельно соединенных конденсаторов емкостью C_1 и C_2 и катушки индуктивностью L (рис.16). В контуре происходят свободные колебания, при которых амплитуда колебаний заряда на конденсаторе емкостью C_2 равна q_0. В конденсаторе емкостью C_1 находится диэлектрическая пластина с диэлектрической проницаемостью ε, которая полностью заполняет его пространство. Когда заряд на этом конденсаторе достигает максимального значения, пластину быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний) удаляют из конденсатора. Определите амплитуду новых колебаний тока в катушке.

4. В колебательном LCR-контуре (см. рис.13) сопротивление R мало, так что колебания в нем затухают слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: дважды за период, когда заряд конденсатора максимален, его пластины быстро (по сравнению с периодом колебаний) раздвигают от расстояния d_1 до расстояния d_2, а в моменты, когда заряд равен нулю, их быстро сдвигают до прежнего расстояния. При каком относительном изменении расстояния между обкладками $(d_2 - d_1)/d_1$ колебания в контуре не будут затухать?