Уравнения Пелля

1. Рассуждайте по индукции.

2. Обозначим через f_n количество способов пройти расстояние длиной n шагов. Очевидно, $f_0 = 1$ (никуда не ходить можно единственным способом) и $f_1 = 2$ (можно сделать либо шаг вперед, либо два шага вперед и шаг назад). Пройти $n + 2$ шага можно трояко: либо пройти сначала $n + 1$ шаг и сделать шаг вперед, либо пройти n шагов и сделать два шага, либо пройти $n + 1$ шаг, а затем сделать два шага вперед и шаг назад. Значит,

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n + f_{n+1} = 2f_{n+1} + f_n.$$

Ответ: $f_7 = 408$.

3. Если $a^2 - db^2 = \pm 1$, то

$$\frac{1}{a+b\sqrt{d}} = \frac{a-b\sqrt{d}}{\left(a-b\sqrt{d}\right)\left(a+b\sqrt{d}\right)} = \frac{a-b\sqrt{d}}{a^2-db^2} = \pm\left(a-b\sqrt{d}\right).$$

Обратно, пусть числа x и y целые. Рассмотрим равенство

$$\left(a+b\sqrt{d}\right)\left(x+y\sqrt{d}\right) = 1$$

и сопряженное к нему

$$\left(a-b\sqrt{d}\right)\left(x-y\sqrt{d}\right) = 1.$$

Перемножив эти равенства, получаем

$$\left(a^2-db^2\right)\left(x^2-dy^2\right) = 1,$$

откуда $a^2 - db^2 = \pm 1$.

4. а) $x_{2n} + y_{2n}\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} =$

$= \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right)^2 = \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right)^2 = x_n^2 + 2y_n^2 + 2x_ny_n\sqrt{2}$. Поскольку $x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$, то $x_{2n} + y_{2n}\sqrt{2} = \left(2x_n^2 - (-1)^n\right) + (2x_ny_n)\sqrt{2}$.

5. а) $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2} = \sqrt{x_n^2} + \sqrt{2y_n^2} = \sqrt{x_n^2} + \sqrt{x_n^2 - (-1)^n}$.

б) Пусть n нечетно. Возведя число $\sqrt{m+d} + \sqrt{m}$ в n-ю степень и воспользовавшись тем, что $\left(\sqrt{m+d}\right)^2$ и $\left(\sqrt{m}\right)^2$ – натуральные числа, получим равенство

$$\left(\sqrt{m+d} + \sqrt{m}\right)^n = s\sqrt{m+d} + t\sqrt{m},$$

где s и t – натуральные числа. Заменив $\sqrt{m}$ на $-\sqrt{m}$, получим сопряженную формулу:

$$\left(\sqrt{m+d} - \sqrt{m}\right)^n = s\sqrt{m+d} - t\sqrt{m}.$$

Перемножим:

$$d^n = (m+d-m)^n = \left(s\sqrt{m+d} + t\sqrt{m}\right)\left(s\sqrt{m+d} - t\sqrt{m}\right) = s^2(m+d) - t^2m.$$

Таким образом, достаточно положить $k = t^2m$ – при этом

$$\left(\sqrt{m+d} + \sqrt{m}\right)^n = \sqrt{s^2(m+d)} + \sqrt{t^2m} = \sqrt{k+d^n} + \sqrt{k}.$$

Решение для четных n аналогично:

$$\left(\sqrt{m+d} + \sqrt{m}\right)^n = s + t\sqrt{m(m+d)},$$

где s, t – натуральные числа. Заменив $\sqrt{m}$ на $-\sqrt{m}$, получим

$$\left(\sqrt{m+d} - \sqrt{m}\right)^n = s - t\sqrt{m(m+d)}.$$

Следовательно,

$$d^n = (m+d-m)^n = \left(s + t\sqrt{m(m+d)}\right)\left(s - t\sqrt{m(m+d)}\right) = s^2 - t^2m(m+d).$$

Значит, если $k = t^2m(m+d)$, то

$$\left(\sqrt{m+d} + \sqrt{m}\right)^n = \sqrt{s^2} + \sqrt{t^2m(m+d)} = \sqrt{k+d^n} + \sqrt{k},$$

что и требовалось.

Можно решить задачу и по-другому. Обозначим $A = \sqrt{m} + \sqrt{m+d}$. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x+d^n} + \sqrt{x}$. Она непрерывна, а ее значение в точке $x = 0$ меньше числа A^n. Поскольку эта функция стремится к бесконечности при $x \to +\infty$, то существует такое x, что

$$\sqrt{x+d^n} = A^n - \sqrt{x}.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим после упрощения

$$\sqrt{x} = \frac{A^{2n} - d^n}{2A^n} = \frac{A^n - \left(\frac{d}{\sqrt{m+d} + \sqrt{m}}\right)^n}{2} = \frac{\left(\sqrt{m+d} + \sqrt{m}\right)^n - \left(\sqrt{m+d} - \sqrt{m}\right)^n}{2},$$

откуда уже легко вывести, что x – натуральное число.

в) Число $x = \dfrac{n + \sqrt{n^2-4}}{2}$ удовлетворяет равенству $x + \dfrac{1}{x} = n$. Положим $k_m = x^m + \dfrac{1}{x^m}$. Тогда $k_{m+1} = k_m\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - k_{m-1} = nk_m - k_{m-1}$. Поскольку числа $k_0 = 2$ и $k_1 = n$ натуральные, при помощи индукции легко доказать, что все числа k_m натуральные. Решая квадратное уравнение, находим $x^m = \dfrac{k_m \pm \sqrt{k_m^2 - 4}}{2}$. Поскольку $x \geq 1$, то нужно взять знак «плюс».

6. Нет. Если бы такие числа a, b, c и d существовали, то при помощи перехода к сопряженным числам мы получили бы

$$0 \leq \left(a - b\sqrt{2}\right)^2 + \left(c - d\sqrt{2}\right)^2 = 7 - 5\sqrt{2} < 0.$$

7. а) *Первый способ.* Пусть $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m = \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$. Переход к сопряженным числам дает равенство $\left(5-3\sqrt{2}\right)^m = \left(3-5\sqrt{2}\right)^n$, которое противоречит неравенствам $0 < 5 - 3\sqrt{2} < 1$ и $5\sqrt{2} - 3 > 1$.

Второй способ. Если $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m = \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$, то и $\left(5-3\sqrt{2}\right)^m = \left(3-5\sqrt{2}\right)^n$. Перемножив эти равенства, получим $(25 - 9\cdot 2)^m = (9 - 25\cdot 2)^n$, т.е. $7^m = (-41)^n$, что невозможно.

б) Пусть для определенности $a < b$. Тогда $1 < b + a\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$, и поэтому $m < n$. Перейдя к сопряженным числам и разделив почленно полученное при этом равенство на исходное, получим

$$\left|\frac{a - b\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}}\right|^m = \left|\frac{b - a\sqrt{d}}{b + a\sqrt{d}}\right|^n.$$

Сравним теперь величины $\mu = \left|\dfrac{b\sqrt{d} - a}{a + b\sqrt{d}}\right|$ и $\nu = \left|\dfrac{a\sqrt{d} - b}{b + a\sqrt{d}}\right|$. Для этого достаточно сравнить числа

$$\left|\left(b\sqrt{d} - a\right)\left(b + a\sqrt{d}\right)\right| \text{ и } \left|\left(a\sqrt{d} - b\right)\left(a + b\sqrt{d}\right)\right|.$$

Первое из них равно $\left|ab(d-1) + \left(b^2 - a^2\right)\sqrt{d}\right|$, а второе равно

$\left|ab(d-1)-\left(b^2-a^2\right)\sqrt{d}\right|$. Обозначив $S=ab(d-1)$ и $T=\left(b^2-a^2\right)\sqrt{d}$, сводим дело к сравнению чисел $|S+T|$ и $|S-T|$. Поскольку S и T – положительные числа, то $|S+T| > |S-T|$. Значит, $\mu > \nu$. Тем более, $\mu^m > \nu^n$. Но, как вы помните, $\mu^m = \nu^n$.

8. а) Число $x=\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}$ можно представить в виде $a+b\sqrt{1975}$, где a, b – натуральные числа. Рассмотрим сопряженное число: $y=\left(45-\sqrt{1975}\right)^{30}=a-b\sqrt{1975}$. Заметим, что $x+y=2a$ и $0<y<1$. Значит, $[x]=[2a-y]=2a-1$.

г) Воспользуйтесь тем, что $2-\sqrt{3}>0$, число $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ целое и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\sqrt{3}\right)^n=0$.

д) $a_n=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n+\left(5-2\sqrt{6}\right)^n$. Обозначим $\alpha=5+2\sqrt{6}$ и $\beta=5-2\sqrt{6}$. Тогда

$$a_{n+2}=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^2\alpha^n+\left(5-2\sqrt{6}\right)^2\beta^n=$$

$$=\left(49+20\sqrt{6}\right)\alpha^n+\left(49-20\sqrt{6}\right)\beta^n=$$

$$=\left(50+20\sqrt{6}\right)\alpha^n+\left(50-20\sqrt{6}\right)\beta^n-\alpha^n-\beta^n=$$

$$=10\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)-\left(\alpha^n+\beta^n\right)=10a_{n+1}-a_n.$$

Поскольку $a_{n+4}=10a_{n+3}-a_{n+2}=10a_{n+3}-10a_{n+1}+a_n$, то числа a_{n+4} и a_n оканчиваются одной и той же цифрой. Поскольку $a_0=2$, то десятичная запись числа a_{1000} оканчивается цифрой 2. Далее,

$$a_{1000}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2000}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2000}>\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2000}=$$

$$=a_{1000}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2000}>a_{1000}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2000}>a_{1000}-10^{-666},$$

откуда и следует, что перед запятой в десятичной записи числа $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2000}$ стоит цифра 1, а после запятой – не менее 666 девяток. (При помощи компьютера можно проверить, что девяток 995 штук.)

9. Обозначим $a=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $b=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $c=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ и $d=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Наряду с равенством

$$a^n=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$$

рассмотрим три сопряженных:

$$b^n=q_n-r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6},$$
$$c^n=q_n+r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6},$$
$$d^n=q_n-r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}.$$

Из этих четырех равенств находим

$$4q_n=a^n+b^n+c^n+d^n,$$
$$4r_n\sqrt{2}=a^n-b^n+c^n-d^n,$$
$$4s_n\sqrt{3}=a^n+b^n-c^n-d^n,$$
$$4t_n\sqrt{6}=a^n-b^n-c^n+d^n.$$

Следовательно,

$$\frac{r_n}{q_n}=\frac{a^n-b^n+c^n-d^n}{\left(a^n+b^n+c^n+d^n\right)\sqrt{2}}=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n-\left(\frac{d}{a}\right)^n}{\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n+\left(\frac{d}{a}\right)^n\right)\sqrt{2}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Стремление величин $(b/a)^n$, $(c/a)^n$ и $(d/a)^n$ к нулю следует из того, что все три числа b/a, c/a и d/a по модулю меньше 1.)

Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

10. а) Например, $(x;y)=(3;5)$, $(20;29)$ или $(119;169)$.

б) Например, $a=3$, $b=2$, $c=1$, $d=4$, $e=3$, $f=2$. Найти эти числа можно, выразив из равенств

$$z=2x+1,$$
$$Z=2X+1,$$
$$Z=3z+4y,$$
$$Y=2z+3y$$

числа X и Y через x и y.

11. Уравнение $x^2+\left(y^2-1\right)^2=\left(y^2\right)^2$ эквивалентно уравнению $x^2-2y^2=-1$.

12. Существует. Например, $f(x)=2x^2+1$.

13. Да, существуют. Подставив $n=1$ в искомые соотношения, получим

$$\begin{cases}17=3a+b,\\12=2a,\end{cases}$$

откуда $a=6$, $b=-1$.

Докажем по индукции, что найденные значения удовлетворяют условию задачи. *База* – это та система, из которой мы нашли a и b. *Переход*. Пусть при некотором n выполнены равенства $x_{n+1}=6x_n-x_{n-1}$ и $y_{n+1}=6y_n-y_{n-1}$. Тогда

$$x_{n+2}=3x_{n+1}+4y_{n+1}=3\left(6x_n-x_{n-1}\right)+4\left(6y_n-y_{n-1}\right)=$$

$$=6\left(3x_n+4y_n\right)-\left(3x_{n-1}+4y_{n-1}\right)=6x_{n+1}-x_n;$$

аналогичная выкладка доказывает равенство $y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n$.

14. Нет. а) $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=3x^2+2$; но квадрат не может дать остаток 2 при делении на 3.

б) $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=$
$=4x^2+4x+6\equiv 2\pmod 4$; но квадрат целого числа не может дать остаток 2 при делении на 4.

в) $5x^2+10=5\left(x^2+2\right)$ не может быть квадратом, поскольку x^2+2 ни при каком целом x не делится на 5.

г) $6x^2+6x+19\equiv 3\pmod 4$.

д) $x^2+4=7z^2$. Значит, x^2+4 делится на 7, что невозможно.

е) $2x^2+2x+11=z^2$. Значит, $z^2\equiv 3\pmod 4$.

ж) $(x-4)^2+(x-3)^2+(x-2)^2+\ldots$
$\ldots+(x+3)^2+(x+4)^2=9x^2+60$

делится на 3, но не делится на 9 и поэтому не может быть точным квадратом.

з) $2x(x+1)\not\equiv 3\pmod 5$, поскольку $(2x+1)^2\not\equiv 7\pmod 5$.

и) $y^2\not\equiv 2\pmod 4$.

15. а) Домножим обе части уравнения $3x^2+3x+1=y^2$ на 4 и выделим полный квадрат: $3\left(4x^2+4x+1\right)+1=(2y)^2$, т.е. $(2y)^2-3(2x+1)^2=1$. Обозначив $z=2y$ и $t=2x+1$, получаем уравнение Пелля $z^2-3t^2=1$. Нас интересуют не все решения последнего уравнения, а лишь те, где z четно. В любом решении уравнения $z^2-3t^2=1$ одно из чисел z и t четно, а другое нечетно. При переходе $(z;t)\to(2z+3t;z+2t)$ пара (четное; нечетное) преобразуется в (нечетное; четное), и наоборот. Поэтому нужно рассматривать только «половину» решений, а именно $(z;t)=(26;15)$, $(362;209)$, $(5042;2911)$, $(70226;40545)$, $(978122;564719)$, $(13623482;7865521)$ и так далее. Этим решениям соответствуют пары $(x;y)=(7;13)$, $(104;181)$, $(1455;2521)$, $(20272;35113)$, $(282359;489061)$, (3932760; 6811741)… В частности, $8^3-7^3=13^2$ и $3932761^3-3932760^3=6811741^2$. Согласитесь, последняя формула впечатляет!

б) $(2n-1)(2n+1)=3(2x+1)^2$. Числа $2n-1$ и $2n+1$ взаимно просты, так что одно из них должно быть квадратом, а другое – утроенным квадратом. Значит, либо $2n-1=3t^2$ и $2n+1=s^2$, либо $2n-1=t^2$ и $2n+1=3s^2$. В первом случае $s^2-3t^2=2$, что невозможно, поскольку квадрат целого числа не может давать остаток 2 при делении на 3. Значит, имеет место второй случай: $2n-1=t^2$. Обозначив $t=2k+1$, из равенства $2n-1=(2k+1)^2$ получаем $n=2k^2+2k+1=k^2+(k+1)^2$.

в) $6x^2+12x+8\equiv 2\not\equiv y^2 \pmod 3$.

16. Числа m и n удовлетворяют равенству $m^2-3n^2=1$, которое можно записать в виде $(m-1)(m+1)=3n^2$.

а) Если k нечетно, то m четно, так что числа $m-1$ и $m+1$ взаимно просты, и решение такое же, как решение пункта б) предыдущего упражнения.

б) Если k четно, то m нечетно и, следовательно, НОД($m-1$, $m+1$) = 2. Значит, одно из чисел $m-1$ и $m+1$ имеет вид $2a^2$, а другое $6b^2$. В случае, когда $m-1=2a^2$ и $m+1=6b^2$, имеем $a^2=3b^2-1$, что невозможно. Следовательно, $m+1=2a^2$, что и требовалось доказать.

17. а) Очевидно, $(x-1)(x+1)=py^2$. Если x четно, то числа $x-1$ и $x+1$ взаимно просты, и для некоторых натуральных a и b должна выполняться одна из систем

$$\begin{cases} x-1=a^2, \\ x+1=pb^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1=pa^2, \\ x+1=b^2. \end{cases}$$

Значит, при четном x одно из чисел $x-1$ и $x+1$ является квадратом натурального числа.

Если же x нечетно, то НОД($x-1$, $x+1$) = 2, и имеем системы

$$\begin{cases} x-1=2a^2, \\ x+1=2pb^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1=2pa^2, \\ x+1=2b^2, \end{cases}$$

из которых следует, что $x-1$ или $x+1$ является удвоенным квадратом.

б) Да. Например, $x=4$, $y=1$, $d=15$.

18. Поскольку $-1<\left(1-\sqrt3\right)^{2n+1}<0$ и число

$$\left(1+\sqrt3\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt3\right)^{2n+1}$$

целое, то

$$\left[\left(1+\sqrt3\right)^{2n+1}\right]=\left(1+\sqrt3\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt3\right)^{2n+1}=$$

$$=\left(1+\sqrt3\right)\left(4+2\sqrt3\right)^n+\left(1-\sqrt3\right)\left(4-2\sqrt3\right)^n=$$

$$=2^n\cdot\left(\left(1+\sqrt3\right)\left(2+\sqrt3\right)^n+\left(1-\sqrt3\right)\left(2-\sqrt3\right)^n\right)=$$

$$=2^n\cdot\left(2x_n+6y_n\right)=2^{n+1}\left(x_n+3y_n\right),$$

где $x_n=\dfrac{\left(2+\sqrt3\right)^n+\left(2-\sqrt3\right)^n}{2}$ и $y_n=\dfrac{\left(2+\sqrt3\right)^n-\left(2-\sqrt3\right)^n}{2\sqrt3}$ удовлетворяют равенству $x_n^2-3y_n^2=1$. Осталось заметить, что x_n и y_n – числа разной четности.

19. Рассмотрим 8 точек: вершины и середины сторон некоторого квадрата. Пусть все они лежат на гиперболах $xy=\pm1$. Если на некоторой ветви лежат некоторые две точки K и L, то соединим их отрезком. Если K и L не лежат на одной стороне квадрата, то с любой стороны от отрезка KL найдется точка M рассматриваемой системы, для которой углы MKL и MLK оба острые. Противоречие очевидно: одна из восьми точек оказалась в полуполосе, ограниченной отрезком KL и перпендикулярами к нему, восстановленными из K и L, и расположенной «внутри» рассматриваемой ветви. Но в этой полуполосе нет ни одной точки рассматриваемых гипербол. Ясно также, что K и L не могут быть соседними вершинами квадрата (иначе середина отрезка KL не лежит на гиперболах).

Поскольку никакая сторона квадрата не может пересекать никакую ветвь гиперболы более чем в двух точках, то мы приходим к единственной конфигурации: на каждой ветви гиперболы лежат одна вершина квадрата и середина одной из выходящих из этой вершины сторон.

Рассмотрим такие две точки A и B. При симметрии относительно начала координат точки A и B переходят в точки A' и B', лежащие на другой ветви той же гиперболы. При этом отрезок $A'B'$ равен и параллелен отрезку BA. Если бы противоположная вершине B вершина квадрата и противоположная середине A середина стороны квадрата не совпадали с точками B' и A' соответственно, то на ветви гиперболы нашлись бы два разных отрезка, равных по длине и параллельных. Противоречие: отрезки, высекаемые на ветви гиперболы разными параллельными прямыми, различны по длине.

20. а) Воспользуйтесь индукцией или, записав тождество в виде $\varphi_n^2-\varphi_n\varphi_{n-1}-\varphi_{n-1}^2=-(-1)^n$, вспомните теорему 6.

б) $$\varphi_{n-2}\varphi_{n+2}=\left(\varphi_n-\varphi_{n-1}\right)\left(\varphi_n+\varphi_{n+1}\right)=$$
$$=\varphi_n^2-\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}+\varphi_n\varphi_{n+1}-\varphi_{n-1}\varphi_n=$$
$$=-(-1)^n+\varphi_n\left(\varphi_{n+1}-\varphi_{n-1}\right)=\varphi_n^2-(-1)^n.$$

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. Пусть Петя задумал число $\overline{ab}=10a+b$. После указанных в условии задачи операций Петя получит новое число $11(a+b)-10a-b=a+10b=\overline{ba}$, которое отличается от задуманного перестановкой цифр.

Петя задумал число 52.

2. Доля мальчиков может сохраниться лишь в том случае, если на каждого вновь пришедшего мальчика будет приходиться шесть вновь пришедших девочек. Чтобы доля уменьшилась, пришедших девочек должно быть еще больше. Если бы пришли 2 мальчика или больше, то должны еще прийти более $2\cdot6=12$ девочек, т.е. всего более 14 человек. Это невозможно. Значит, в кружок пришел только один мальчик, а девочек пришло – 12.

3. Достроим второй шестиугольник до прямоугольника (рис.1). Далее проводим прямую, проходящую через центр

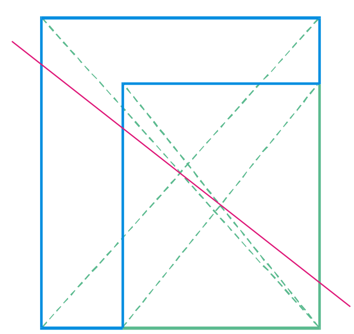

Рис. 1

большого прямоугольника и центр маленького прямоугольника, представляющего собой «вырез», – она и окажется как раз тем, что требуется.

4. Вместо гирек будем рассматривать числа, выражающие их массы. От каждого из двух диаметрально расположенных чисел отнимем величину наименьшего из них. Тогда по кругу будут расставлены только нули и единицы.

Проведем диаметр круга так, чтобы по разные стороны от него оказалось одинаковое количество чисел. Зафиксируем какую-то одну из сторон и подсчитаем сумму всех расположенных на ней чисел. Начнем поворачивать диаметр относительно центра круга на 18°, каждый раз подсчитывая сумму чисел на фиксированной стороне. Эта сумма при каждом повороте будет увеличиваться или уменьшаться на 1, пробегая все промежуточные значения от наименьшей возможной величины n $(n \le 5)$ до наибольшей возможной величины N $(N \ge 5)$, причем $n + N = 10$. Следовательно, при каком-то положении диаметра сумма чисел на фиксированной стороне окажется равной 5, т.е. на двух разделенных этим диаметром половинках круга сумма чисел одинакова. А это означает, что общие массы гирек, стоящие на этих половинках, равны.

5. Можно. Обозначим через $n!$ произведение первых натуральных чисел от 1 до n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Отметив числа 10, 11, 12, ..., $(9!-1)$, 9!, получим

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (9!-1) = 10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (9!-1) \cdot 9!.$$

Конкурс «Математика 6–8»

(*см. «Квант» №6 за 2001 г.*)

11. $\frac{125}{9}$. Рассмотрим любой квадрат 15×15. Его можно разделить на 25 квадратов 3×3. В каждом из них сумма чисел равна 5, поэтому сумма чисел во всем квадрате 15×15 равна $5 \cdot 25 = 125$. С другой стороны, этот квадрат можно разделить на 9 квадратов 5×5. Сумма в каждом из них одинакова, поэтому она равна $\frac{125}{9}$.

12. 16. Чем меньше использовано прямоугольников, тем меньше частей получится после разрезания. Без прямоугольников не обойтись. Действительно, если угол закрыт фигуркой из четырех клеток, то несколько других фигурок вырезаются однозначно, и соседние углы не попадают в фигурку (рис.2).

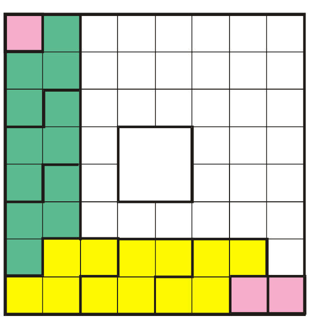

Рис. 2

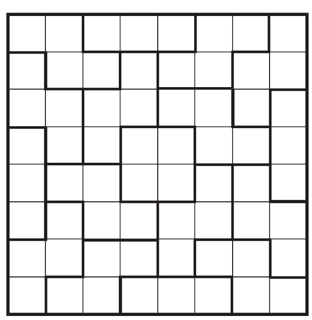

Рис. 3

Если вырезать один, два или три прямоугольника, то число оставшихся клеток не будет делиться на 4 и разрезание оставшейся части на фигурки из четырех клеток невозможно. Четырьмя прямоугольниками обойтись можно (рис.3). При этом получается 16 фигурок.

13. Выигрышную стратегию имеет Малыш. Сначала заметим, что если Малышу удастся оставить Карлсону брусок вида $1 \times n \times n$, где $n > 1$, то Малыш обеспечивает себе победу. Действительно, в этом случае Карлсон своим ходом вынужден будет оставить либо брусок $1 \times 1 \times n$, после чего он проигрывает, либо брусок $1 \times m \times n$, $1 < m < n$. В последнем случае Малыш своим очередным ходом оставляет брусок $1 \times m \times m$, размеры которого меньше размеров предыдущего бруска. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не получится кубик $1 \times 1 \times 1$, который Малыш съедает. Выигрышная стратегия Малыша состоит в следующем. Своим первым ходом Малыш оставляет брусок $2 \times 2001 \times 2002$. В ответ Карлсон не может оставить брусок $1 \times 2001 \times 2002$, $2 \times 2001 \times 2001$ или $2 \times 2001 \times 2$, иначе своим очередным ходом Малыш оставит брусок, один из размеров которого равен 1, а два других одинаковы, после чего выигрывает.

Предположим, Карлсон оставит брусок, заменив один из размеров предыдущего бруска числом p, $2 < p < 2001$. Тогда $p = 2q$ или $p = 2q - 1$, где натуральное число q таково, что $2 \le q \le 1000$. В обоих случаях Малыш может сделать брусок $2 \times (2q-1) \times 2q$ – того же вида, что и брусок, который он оставил перед этим, но меньших размеров. Если Карлсон и дальше будет играть наилучшим образом, то Малыш в конце концов оставит ему брусок $2 \times 3 \times 4$. Несложно убедиться, что как бы Карлсон ни разрезал этот брусок, при правильной игре Малыша он обязательно проигрывает.

14. Продолжим стороны AH, BC и FG до пересечения в точках M, N, K (рис.4). Покажем, что точка O – центр вписанной окружности треугольника MNK – является центром описанной окружности шестиугольника.

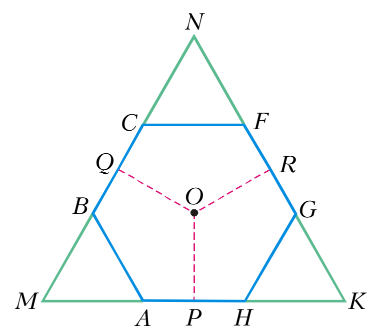

Рис. 4

Обозначим через P, Q, R основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AH, BC и FG соответственно. Из равенств углов: $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle F$ и $\angle G = \angle H$ следуют равенства длин отрезков: $AP = BQ$, $QC = FR$, $RG = HP$. Так как $AP + HP = BQ + QC = FR + RG$, то $AP = BQ = QC = FR = RG = HP$ и шесть прямоугольных треугольников OAP, OHP, OBQ, OCQ, OFR, OGR равны, т.е. равны их гипотенузы. Поскольку точки A, B, C, F, G, H находятся на одинаковом удалении от точки O, то эта точка является центром окружности, описанной вокруг шестиугольника $ABCFGH$.

15. Если справедливо равенство $ab^2 + ba^2 = 0$ или равносильное ему равенство $ab(a+b) = 0$, то либо одно из чисел a или b равно нулю, либо $a + b = 0$. Несложно проверить, что в любом из этих случаев равенство $a^5 + b^5 = (a+b)^5$ выполняется. Пусть теперь справедливо равенство $a^5 + b^5 = (a+b)^5$. Докажем, что в этом случае $ab^2 + ba^2 = 0$. Здесь можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Предположим, что ни одно из равенств $a = 0$, $b = 0$, $a + b = 0$ не выполняется. Числа a и b не могут быть одного знака, поскольку в этом случае было бы справедливо равенство $|a|^5 + |b|^5 = (|a| + |b|)^5$, что невозможно. Действительно, раскрывая скобки в правой части этого равенства, можно убедиться, что она больше левой.

Если числа a и b разных знаков, то знак одного из чисел $(-a)$ или $(-b)$ совпадает со знаком суммы $a+b$, а знак другого числа противоположен ему. Пусть, для определенности, совпадают знаки чисел $a+b$ и $(-a)$. Перепишем исходное равенство:

$$(a+b)^5+(-a)^5=b^5.$$

Но в этом случае справедливо равенство

$$(a+b)^5+(-a)^5=\left((a+b)+(-a)\right)^5,$$

что для чисел одного знака $(a+b)$ и $(-a)$ невозможно.

Итак, равенство $a^5+b^5=(a+b)^5$ влечет выполнение одного из равенств $a=0$, $b=0$, $a+b=0$ и, значит, справедливость равенства

$$ab^2+ba^2=0.$$

Второй способ. Поскольку

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$

то в случае $(a+b)^5=a^5+b^5$ имеем

$$5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4=0.$$

Преобразовав выражение в левой части этого равенства, получим

$$\frac{5}{2}ab(a+b)\left((a+b)^2+a^2+b^2\right)=0.$$

Последнее равенство имеет место лишь тогда, когда $ab=0$ или $a+b=0$. В любом из этих случаев $ab^2+ba^2=0$.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Молекулы паров растворителя за счет хаотического движения из-за столкновений с молекулами воздуха диффундируют на большие расстояния.
2. Иначе процесс растворения (диффузия) сахара затянется на долгое время.
3. В холодном, так как скорость диффузии водорода уменьшается при понижении температуры.
4. При сдавливании поверхностные слои деталей размягчаются, усиливается взаимная диффузия частиц и, как следствие, увеличиваются силы сцепления деталей.
5. Диффузия – это самопроизвольное выравнивание концентраций различных веществ, отражающее стремление любой системы из большого числа частиц к хаотичному, беспорядочному их размещению.
6. Сначала более подвижные легкие молекулы, выравнивая свою концентрацию, быстрее продиффундировали сквозь перегородку вправо. Со временем тяжелые молекулы проникли в левую секцию, и давления сравнялись.
7. В пленке пузыря концентрация растворенного газа вблизи ее внутренней поверхности выше, чем вблизи внешней поверхности, поскольку растворимость газа зависит от его давления, а внутри пузыря оно больше, чем снаружи. Разность концентраций и является «движущей силой» диффузионного потока.
8. В лед, так как наличие воздуха в снегу делает его менее теплопроводным.
9. Если их температура будет равна температуре той части тела, которой мы их касаемся.
10. На дне и стенках чайника образуется слой накипи с малой теплопроводностью, что ухудшает передачу тепла воде от нагревателя.
11. Поток тепла направлен в сторону убывания температуры, т.е. против указанной оси.
12. У сковороды большой площади центр нагрет сильнее, чем края; давление паров под интенсивно испаряющейся каплей больше со стороны, ближайшей к центру; разность давлений, «выдавая» разность температур, и перемещает капли к краю.
13. Слева гипс, а справа стекло. В отличие от аморфного стекла, кристаллический гипс обладает анизотропией, т.е. проводит тепло неодинаково по разным направлениям.
14. Считая температуру на внутренней поверхности комбинезона равной температуре человеческого тела и полагая потоки тепла наружу одинаковыми, получим, что материал второго комбинезона, температура внешней поверхности которого ниже, имеет более низкую теплопроводность, а именно такую одежду мы и называем теплой.
15. В сторону потока жидкости.
16. Чем ниже температура масла, тем больше его вязкость, а значит, тем больше силы внутреннего трения.
17. Такую способность приобретает только очень густой, вязкий сироп, содержащий необходимое для длительного хранения количество сахара.

Микроопыт

Раньше успокоится воздух. Трение в движущемся воздухе очень мало, но прежде всего мала зависящая от плотности кинетическая энергия воздуха, которую он должен потерять. Вода же, обладающая много большей, чем воздух, плотностью, тормозится дольше, несмотря на большую вязкость.

Как найти сумму?

1. Из рисунка 1 статьи имеем $(1-r_1)^2+1^2=(1+r_1)^2$, откуда $d_1=2r_1=1/2$. Аналогично из $(1-d_1-r_2)^2+1^2=(1+r_2)^2$ находим $d_2=1/6$. Индукцией по k найдем $d_k=1/(k(k+1))$.

2. $$\frac{1}{mx(x+1)\ldots(x+m-1)}-\frac{1}{m(x+1)\ldots(x+m)}=$$
$$=\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+m)}.$$

3. $(k+1)k(2k+1)/6-(k-1)k(2k-1)/6=k^2$,
$(k+1)^2k^2/4-k^2(k-1)^2/4=k^3$.

4. $F(x+1)-F(x)=x^4$.

5. $\Delta x^{(m+1)}=(x+1)x\ldots(x-m+1)-$
$-\ x(x-1)\ldots(x-m)=(m+1)x^{(m)}$.

6. Найдем, например, S_n^4. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n}k^{(4)}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5},$$

а

$$k^{(4)}=k^4-6k^3+11k^2-6k,$$

то

$$S_n^4=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5}+6\frac{(n+1)^2n^2}{4}-$$
$$-11\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}+6\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}.$$

Аналогично получаем

$$S_n^5 = \frac{n^2(n+1)^2\left(2n^2+2n-1\right)}{12},$$

$$S_n^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n+6n^3-3n+1\right)}{42}.$$

7. $4Q_3 = 4a^3n + 6a^2dn(n-1) + 2ad^2n\left(2n^2-3n+1\right) + d^3n^2(n-1)^2$.

8. Воспользуйтесь формулой суммы n членов арифметической прогрессии.

9. $\Phi_q^{(4)}(n) =$

$$= \frac{q-2}{3!}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{(3)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{(2)}}{2} = \frac{q-2}{4!}(n+2)^{(4)} + \frac{(n+2)^{(3)}}{3!} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{4!}\left((n-1)(q-2)+4\right).$$

10. Для m = 2, 3, 4 формула верна; предположим, что она верна для $m = s$, и вычислим

$\Phi_q^{(s+1)}(n) =$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Phi_q^{(s)}(k) = \frac{q-2}{s!}\sum_{k=1}^{n}(k+s-2)^{(s)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+s-2)^{(s-1)}}{(s-1)!} =$$

$$= \frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{(s+1)!}\left((n-1)(q-2)+s+1\right).$$

11. Дважды примените формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

12. Используйте равенство

$$\frac{1}{(a+kd)\left(a+(k+1)d\right)\ldots\left(a+(k+m)d\right)} =$$

$$= \frac{1}{md}\left(\frac{1}{(a+kd)\ldots\left(a+(k+m-1)d\right)} - \frac{1}{\left(a+(k+1)d\right)\ldots\left(a+(k+m)d\right)}\right).$$

Тогда

1) $\frac{n}{2n+1}$; 2) $\frac{n}{2(3n+2)}$; 3) $\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$;

4) $\frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$.

13. 1) $\frac{1}{2} + \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{6}$;

2) $\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$; 3) $\frac{1}{4} - \frac{2n+3}{2(n+2)(n+3)}$

(воспользуйтесь равенством

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)});$$

4) $1 - \frac{1}{n!}$; 5) $\log_a(n+1)$;

6) $\operatorname{arctg} n$ (пусть $\operatorname{arctg}(k+1) = a$, $\operatorname{arctg} k = b$, тогда $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{1}{1+k(k+1)}$);

7) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(n+1)x$;

8) $\operatorname{tg}(n+1)x - \operatorname{tg} x$.

14. Воспользуйтесь равенствами

а) $2\sin\frac{d}{2}\sin(a+kd) = \cos\left(a+\frac{2k-1}{2}d\right) - \cos\left(a+\frac{2k+1}{2}d\right)$;

б) $2\sin\frac{d}{2}\cos(a+kd) = \sin\left(a+\frac{2k+1}{2}d\right) - \sin\left(a+\frac{2k-1}{2}d\right)$.

15. Для решения п. а) воспользуйтесь замечанием 1 статьи; б) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x$, положив $x = \frac{a}{2^k}$, получим $\operatorname{tg}\frac{a}{2^k} = \operatorname{ctg}\frac{a}{2^k} - 2\operatorname{ctg}\frac{a}{2^{k-1}}$; в) см. упражнение 11;
г) воспользуйтесь равенством

$$\left(1-2a\cos x + a^2\right)a^k\sin kx =$$

$$= a^k\sin kx - a^{k+1}\sin(k+1)x - a^{k+1}\sin(k-1)x + a^{k+2}\sin kx;$$

п. д) аналогичен п. г).

16. а) $\frac{1}{d}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{d}\right)$, так как $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+d} = \frac{d}{k(k+d)}$;

б) $\frac{3}{4}$, так как $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$.

17. Все утверждения, кроме случая г), доказываются простыми вычислениями; разберем п. г). Выпишем несколько чисел, отвечающих указанному разбиению: 1; 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19; … Количество чисел, встречающихся до n-й группы, равно $1+2+\ldots+(n-1) = n(n-1)/2$. А их сумма равна $S_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$; сумма всех чисел, включая и n-ю группу, равна $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Откуда $S = S_n - S_{n-1} = n^3$.

Колебательный контур

1. $I_m = \frac{2q}{\sqrt{5LC_1}}$.

2. $I_0 = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{3L}}$.

3. $I_0 = \frac{q_0(C_1+C_2)}{C_2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{L(C_1+\varepsilon C_2)}}$.

4. $\frac{d_2-d_1}{d_1} \ge \pi R\sqrt{\frac{C}{L_1}}$.

VIII Российская олимпиада по астрономии и физике космоса

8 класс

1. Планеты выглядят наиболее яркими и поэтому наиболее удобными для наблюдений во время противостояний. Период обращения Юпитера вокруг Солнца составляет около 12 лет (точнее, 11,86 года). Следовательно, через год он уйдет вперед примерно на 1/12 часть окружности, и Земля «догонит» его за один месяц. Следовательно, наилучшая видимость будет в середине декабря.

2. В этот день склонение Солнца $\delta = +23{,}5°$. Поэтому пройти через зенит (а это и есть наибольшая высота) Солнце сможет только на широте тропика Рака, т.е. на широте $\varphi = 23{,}5°$.

3. Допустимый «уход» телескопа составляет $1''$ за час, или

$24''$ за сутки. Во временно́й шкале это будет $24''/(15''/\text{с}) =$ = 1,6 секунд времени за сутки.

4. Поскольку Сатурн в 9,54 раза дальше от Солнца, чем Земля, угловой диаметр солнечного диска, наблюдаемого с Сатурна, в 9,54 раза меньше, чем наблюдаемого с Земли: $\alpha = 32'/9{,}54 \approx 3{,}4'$. Нужно определить, с какого из спутников Сатурна под таким же углом виден диск планеты. Приняв экваториальный диаметр Сатурна равным 120 тыс. км, найдем, что под углом $3{,}4'$ он виден с расстояния

$$R = 120 \text{ тыс.км}/\alpha = 120 \text{ тыс.км}/\left(3{,}4'/(3438'/\text{рад})\right) =$$
$$= 120 \text{ тыс.км} \cdot 3438/3{,}4 \approx 120 \text{ млн км}.$$

(Заметим, что 3438 – число, которое полезно запомнить : это соотношение между радианом и угловой минутой, или, проще говоря, «число минут в радиане».) Но такого далекого спутника у Сатурна нет, точнее говоря – еще не открыто. Самый далекий среди известных – Феба – отстоит от Сатурна всего на 13 млн км. Поэтому правильный ответ: либо художник изобразил пока еще неизвестный спутник, либо он просто не задумывался об астрономической достоверности картины.

5. В течение года наклон земной оси практически не изменяется. Именно поэтому одну половину года к Солнцу сильнее обращено северное полушарие, а вторую половину года – южное. В эти периоды года дни там длиннее и, главное, солнечные лучи более отвесно падают на землю и лучше ее нагревают. Это и есть причина смены времен года.

6. Свет далеких звезд, образующих Млечный Путь, очень слаб. При лунном сиянии Млечный Путь не виден.

9 класс

5. Да, может. Для этого планета должна иметь нулевой наклон экватора к плоскости орбиты, а сама орбита должна обладать заметным эксцентриситетом (т.е. должна заметно отличаться от круговой). Тогда сезоны, зависящие только от потока тепла, будут по всей планете определяться лишь ее положением на орбите, а значит, будут везде меняться синхронно.

6. Космонавт для перемещения по станции сначала должен оттолкнуться от стенки и получить при этом ускорение, а потом затормозить у другой стенки – тоже получить ускорение. Если космонавт приобретает ускорение a, то «все остальное» приобретает ускорение am/M в противоположном направлении; таким образом, уровень микрогравитации на станции определяется характерной величиной ускорения космонавта и соотношением масс космонавта и станции. Принимая массу космонавта m = 70 кг, получаем $m/M = 1/2000$. Оценим характерные величины ускорений космонавтов. Очевидно, что они определяются силами, с которыми космонавты взаимодействуют с корпусом станции. На Земле при ходьбе эта сила составляет mg. Такая сила ускоряет человека с ускорением g, а станцию, соответственно, с ускорением $1/2000\,g = 500\,\mu g \approx 5$ мм/с^2. Это и есть возможный уровень микрогравитации на станции.

10 класс

1. Поскольку удар упругий, аппарат отскочит от поверхности с той же скоростью, с которой он ударился о нее. Чтобы оценить высоту подъема, необходимо оценить ускорение на поверхности:

$$g = GM/R^2 = G\left(4/3\,\pi R^3 \rho\right)/R^2 = 4/3\,\pi G R \rho .$$

Предполагая, что аппарат отскочит от астероида на небольшую высоту – такую, что изменением величины ускорения свободного падения можно пренебречь, получаем

$$h = V^2/(2g) = 3V^2/(8\pi G R \rho) \approx 160 \text{ м}.$$

2. Координаты данной звезды – это координаты Солнца в точке летнего солнцестояния. Следовательно, звезда находится на эклиптике. Плоскость эклиптики не меняется со временем, так что звезда всегда будет на эклиптике. Точка весеннего равноденствия, от которой отсчитывается α, совершает обход эклиптики за 26000 лет навстречу годовому движению Солнца. Поэтому через четверть периода прецессии (6500 лет) звезда будет иметь $\alpha = 6$ ч $+ 6$ ч $= 12$ ч. Точка на эклиптике с таким α – это точка осеннего равноденствия. Итак, α = 12 ч, δ = 0°.

3. Для того чтобы видимая звездная величина Солнца увеличилась на Δm, необходимо, чтобы световой поток уменьшился в $10^{\Delta m/2,5}$ раз, следовательно, наблюдателю надо удалиться от Солнца в $\left(10^{\Delta m/2,5}\right)^{1/2} = 10^{\Delta m/5}$ раз. По третьему закону Кеплера квадрат периода обращения планеты пропорционален кубу большой полуоси ее орбиты. Сравнивая нашу гипотетическую орбиту с орбитой Земли, получаем

$$(T_\text{Х}/T_\text{З})^2 = (R_\text{Х}/R_\text{З})^3 ,$$

откуда

$$T_\text{Х} = T_\text{З} \cdot \left(10^{\Delta m/5}\right)^{3/2} = T_\text{З} \cdot 10^{3\Delta m/10} .$$

Разность звездных величин Луны и Солнца составляет

$$\Delta m = -12{,}7 - (-26{,}8) = 14{,}1.$$

Тогда

$$T_\text{Х} = 1 \text{ год} \cdot 10^{3 \cdot 14,1/10} \approx 17000 \text{ лет}.$$

4. 1) Герой романа был в северном полушарии Луны и, разумеется, на видимой ее стороне. 2) Луна была ближе к последней четверти. 3) На фоне Стрельца или (менее вероятно) Змееносца. 4) Скорее всего, была весна – конец марта или апрель.

11 класс

1. Есть несколько способов, хотя все они не очень точные. Наиболее часто используются следующие: а) По светимости ярчайших звезд, которая в свою очередь определяется по их спектральному классу. Для молодых рассеянных скоплений ярчайшими являются голубые сверхгиганты класса О или В, для шаровых – красные гиганты. б) По диаграмме «звездная величина – спектр (или цвет)», совмещая положение главной последовательности на этой диаграмме с ее положением на диаграмме Герцшпрунга–Рессела, построенной для скоплений (или отдельных звезд) с известным расстоянием. в) По цефеидам (если они наблюдаются в скоплении).

5. Видимый угловой размер звезд должен быть меньше разрешающей способности глаза, т.е. линейный размер (диаметр) изображений этих звезд на куполе не должен превышать $L_0 = \alpha R$, где α – разрешающая способность человеческого глаза в темноте (около $50'' \approx 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ рад), R – радиус зала планетария. В нашем случае $L_0 = \alpha R \approx 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \text{ м} \approx$ $\approx 1{,}25$ мм. Размер изображения одной звезды, получаемого на куполе с помощью оптической системы, определяется двумя параметрами. Первый – чисто геометрический, связанный с оптическим увеличением размера звезды при проецировании ее на купол. Если размер звезды на слайде l_0 = 0,1 мм, то размер изображения $L = \Gamma l_0 = l_0 R/r$, где r – расстояние от упомянутой дырочки в фольге до проецирующей линзы (по формуле линзы, $1/R + 1/r = 1/F$). В нашем случае увеличение не должно превышать $\Gamma_0 = L_0/l_0$, откуда находим, что фокусное расстояние системы должно быть не меньше

$$F = R/(\Gamma_0 + 1) = R/(L_0/l_0 + 1) \approx Rl_0/L_0 = \\ = Rl_0/(\alpha R) = l_0/\alpha \approx 40 \text{ см}.$$

Условие, вообще говоря, вполне выполнимое.

Второй параметр – дифракционный. Угловой размер расхождения пучка от точечного источника (находящегося вблизи фокуса объектива) равен λ/D, где λ – рабочая длина волны (порядка 500 нм, или $5 \cdot 10^{-7}$ м), D – диаметр объектива проецирующей оптической системы (т.е., именно тот диаметр, который нам надо найти). Размер изображения точечного источника на куполе радиусом R при этом составит $R\lambda/D$. Таким образом, необходимо условие $R\lambda/D = \alpha R$, откуда

$$D = \lambda/\alpha \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{м} = 2 \text{ мм}.$$

Условие тоже вполне выполнимое.

6. Радиус орбиты в среднем за сутки составлял

$$R_0 + h = 6371 \text{ км} + 236 \text{ км} = 6607 \text{ км} \approx 6{,}6 \cdot 10^6 \text{ м},$$

а изменение этого радиуса за сутки равно $\Delta h = -2{,}5$ км $\approx -2{,}5 \cdot 10^3$ м. Падение средней высоты орбиты происходит по причине потери станцией энергии из-за трения о верхние слои атмосферы. Будем рассматривать квазистационарный процесс: считать орбиту все время круговой, а работу сил трения $A = FL$ сводить к изменению параметров этой круговой орбиты. Сила $F = \Delta p/\Delta t$ находится из следующих соображений: в течение каждого промежутка времени Δt о станцию ударяется масса $\mu = \rho SV\Delta t$ в среднем неподвижных молекул (ρ – плотность атмосферы на высоте полета станции). В результате упругих столкновений их скорость относительно станции меняется от –V до +V, а относительно Земли – от 0 до $2V$. За время Δt станция передает молекулам импульс

$$\Delta p = \mu \cdot 2V = 2\rho SV^2 \Delta t .$$

Отсюда

$$F = \Delta p/\Delta t = 2\rho SV^2 .$$

Значит, если за время $\tau = 24$ ч станция пролетит расстояние $L = V\tau$, работа сил трения составит

$$A = FL = 2\rho SV^3 \tau .$$

С другой стороны, поскольку полная энергия станции равна $E = -GMm/(2(R_0 + h))$, то изменение энергии станции за это время составит

$$\Delta E = -GMm/(2(R_0 + h + \Delta h)) - \\ - (-GMm/(2(R_0 + h))) \approx \Delta h\, GMm/\left(2(R_0 + h)^2\right),$$

где Δh – отрицательная величина. Таким образом, $\Delta E = -A$, или

$$-2\rho SV^3 \tau = \Delta h\, GMm/\left(2(R_0 + h)^2\right).$$

Отсюда

$$\rho = -\Delta h\, GMm/\left(4(R_0 + h)^2 SV^3 \tau\right),$$

или, учитывая, что $V^2 = GM/(R_0 + h)$,

$$\rho = m\Delta h/\left(4\tau S(GM)^{1/2} (R_0 + h)^{1/2}\right) \approx 3{,}9 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3 .$$

Кроссворд «Физики и их открытия»

По горизонтали: **3.** Эйнштейн. **5.** Максвелл. **8.** Малюс. **10.** Лебедев. **11.** Якоби. **15.** Ган. **16.** Циолковский. **17.** Гук. **18.** Архимед. **20.** Вин. **21.** Паскаль. **25.** Галилей. **26.** Мариотт. **30.** Чедвик. **31.** Перрен. **32.** Араго. **33.** Кеплер. **34.** Томсон. **35.** Фарадей.

По вертикали: **1.** Эйлер. **2.** Майер. **4.** Ньютон. **6.** Евклид. **7.** Зельдович. **9.** Авогадро. **12.** Бернулли. **13.** Герике. **14.** Капица. **19.** Милликен. **22.** Столетов. **23.** Ферма. **24.** Карно. **27.** Вебер. **28.** Юкава. **29.** Герон.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.Н.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Регистрационное свидетельство №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени ГУП «Чеховский полиграфический комбинат» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №