$\left|ab(d-1)-\left(b^2-a^2\right)\sqrt{d}\right|$. Обозначив $S=ab(d-1)$ и $T=\left(b^2-a^2\right)\sqrt{d}$, сводим дело к сравнению чисел $|S+T|$ и $|S-T|$. Поскольку S и T – положительные числа, то $|S+T|>|S-T|$. Значит, $\mu>\nu$. Тем более, $\mu^m>\nu^n$. Но, как вы помните, $\mu^m=\nu^n$.

8. а) Число $x=\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}$ можно представить в виде $a+b\sqrt{1975}$, где a, b – натуральные числа. Рассмотрим сопряженное число: $y=\left(45-\sqrt{1975}\right)^{30}=a-b\sqrt{1975}$. Заметим, что $x+y=2a$ и $0<y<1$. Значит, $[x]=[2a-y]=2a-1$.

г) Воспользуйтесь тем, что $2-\sqrt{3}>0$, число $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ целое и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\sqrt{3}\right)^n=0$.

д) $a_n=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n+\left(5-2\sqrt{6}\right)^n$. Обозначим $\alpha=5+2\sqrt{6}$ и $\beta=5-2\sqrt{6}$. Тогда

$$a_{n+2}=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^2\alpha^n+\left(5-2\sqrt{6}\right)^2\beta^n=$$
$$=\left(49+20\sqrt{6}\right)\alpha^n+\left(49-20\sqrt{6}\right)\beta^n=$$
$$=\left(50+20\sqrt{6}\right)\alpha^n+\left(50-20\sqrt{6}\right)\beta^n-\alpha^n-\beta^n=$$
$$=10\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)-\left(\alpha^n+\beta^n\right)=10a_{n+1}-a_n.$$

Поскольку $a_{n+4}=10a_{n+3}-a_{n+2}=10a_{n+3}-10a_{n+1}+a_n$, то числа a_{n+4} и a_n оканчиваются одной и той же цифрой. Поскольку $a_0=2$, то десятичная запись числа a_{1000} оканчивается цифрой 2. Далее,

$$a_{1000}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2000}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2000}>\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2000}=$$
$$=a_{1000}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2000}>a_{1000}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2000}>a_{1000}-10^{-666},$$

откуда и следует, что перед запятой в десятичной записи числа $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2000}$ стоит цифра 1, а после запятой – не менее 666 девяток. (При помощи компьютера можно проверить, что девяток 995 штук.)

9. Обозначим $a=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $b=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $c=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ и $d=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Наряду с равенством

$$a^n=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$$

рассмотрим три сопряженных:

$$b^n=q_n-r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6},$$
$$c^n=q_n+r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6},$$
$$d^n=q_n-r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}.$$

Из этих четырех равенств находим

$$4q_n=a^n+b^n+c^n+d^n,$$
$$4r_n\sqrt{2}=a^n-b^n+c^n-d^n,$$
$$4s_n\sqrt{3}=a^n+b^n-c^n-d^n,$$
$$4t_n\sqrt{6}=a^n-b^n-c^n+d^n.$$

Следовательно,

$$\frac{r_n}{q_n}=\frac{a^n-b^n+c^n-d^n}{\left(a^n+b^n+c^n+d^n\right)\sqrt{2}}=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n-\left(\frac{d}{a}\right)^n}{\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n+\left(\frac{d}{a}\right)^n\right)\sqrt{2}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Стремление величин $(b/a)^n$, $(c/a)^n$ и $(d/a)^n$ к нулю следует из того, что все три числа b/a, c/a и d/a по модулю меньше 1.)

Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

10. а) Например, $(x;y)=(3;5)$, $(20;29)$ или $(119;169)$.

б) Например, $a=3$, $b=2$, $c=1$, $d=4$, $e=3$, $f=2$. Найти эти числа можно, выразив из равенств

$$z=2x+1,$$
$$Z=2X+1,$$
$$Z=3z+4y,$$
$$Y=2z+3y$$

числа X и Y через x и y.

11. Уравнение $x^2+\left(y^2-1\right)^2=\left(y^2\right)^2$ эквивалентно уравнению $x^2-2y^2=-1$.

12. Существует. Например, $f(x)=2x^2+1$.

13. Да, существуют. Подставив $n=1$ в искомые соотношения, получим

$$\begin{cases}17=3a+b,\\12=2a,\end{cases}$$

откуда $a=6$, $b=-1$.

Докажем по индукции, что найденные значения удовлетворяют условию задачи. *База* – это та система, из которой мы нашли a и b. *Переход*. Пусть при некотором n выполнены равенства $x_{n+1}=6x_n-x_{n-1}$ и $y_{n+1}=6y_n-y_{n-1}$. Тогда

$$x_{n+2}=3x_{n+1}+4y_{n+1}=3\left(6x_n-x_{n-1}\right)+4\left(6y_n-y_{n-1}\right)=$$
$$=6\left(3x_n+4y_n\right)-\left(3x_{n-1}+4y_{n-1}\right)=6x_{n+1}-x_n;$$

аналогичная выкладка доказывает равенство $y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n$.

14. Нет. а) $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=3x^2+2$; но квадрат не может дать остаток 2 при делении на 3.

б) $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=$
$=4x^2+4x+6\equiv2\pmod 4$; но квадрат целого числа не может дать остаток 2 при делении на 4.

в) $5x^2+10=5\left(x^2+2\right)$ не может быть квадратом, поскольку x^2+2 ни при каком целом x не делится на 5.

г) $6x^2+6x+19\equiv3\pmod 4$.

д) $x^2+4=7z^2$. Значит, x^2+4 делится на 7, что невозможно.

е) $2x^2+2x+11=z^2$. Значит, $z^2\equiv3\pmod 4$.

ж) $(x-4)^2+(x-3)^2+(x-2)^2+\ldots$
$\ldots+(x+3)^2+(x+4)^2=9x^2+60$

делится на 3, но не делится на 9 и поэтому не может быть точным квадратом.

з) $2x(x+1)\not\equiv3\pmod 5$, поскольку $(2x+1)^2\not\equiv7\pmod 5$.

и) $y^2\not\equiv2\pmod 4$.

15. а) Домножим обе части уравнения $3x^2+3x+1=y^2$ на 4 и выделим полный квадрат: $3\left(4x^2+4x+1\right)+1=(2y)^2$, т.е. $(2y)^2-3(2x+1)^2=1$. Обозначив $z=2y$ и $t=2x+1$, получаем уравнение Пелля $z^2-3t^2=1$. Нас интересуют не все решения последнего уравнения, а лишь те, где z четно. В любом решении уравнения $z^2-3t^2=1$ одно из чисел z и t четно, а другое нечетно. При переходе $(z;t)\to(2z+3t;z+2t)$ пара (четное; нечетное) преобразуется в (нечетное; четное), и наоборот. Поэтому нужно рассматривать только «половину» решений, а именно $(z;t)=(26;15)$, $(362;209)$, $(5042;2911)$, $(70226;40545)$, $(978122;564719)$, $(13623482;7865521)$ и так далее. Этим решениям соответствуют пары $(x;y)=(7;13)$, $(104;181)$, $(1455;2521)$, $(20272;35113)$, $(282359;489061)$,