функции $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$ мы сумели найти другую функцию $F(x)=-\dfrac{1}{x}$, так что выполняется равенство

$$f(k)=F(k+1)-F(k)=\Delta F(k). \qquad (1)$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=F(n+1)-F(1). \qquad (2)$$

Не правда ли, (1) напоминает формулу дифференцирования функции $F(x)$, а (2) – интегрирования функции $f(x)$, знакомые читателям из школьного курса математического анализа? Но если в математическом анализе приращение аргумента устремляют к нулю, то здесь оно равно единице и все время остается постоянным. Поэтому мы не можем воспользоваться известными из анализа правилами вычисления первообразной, пример 1 это наглядно подтверждает. Поиск по функции $f(x)$ ее «первообразной» $F(x)$ здесь уже нелегкая проблема, в каждом конкретном примере она решается индивидуально, и не всегда успешно. Тем интереснее случаи, когда удается найти решение.

Пример 2. Обобщим сумму, возникшую в примере 1. В качестве $f(x)$ возьмем функцию $\dfrac{1}{x(x+1)\ldots(x+m)}$.

Упражнение 2. Покажите, что в этом случае

$$F(x)=\frac{-1}{mx(x+1)\ldots(x+m-1)}.$$

На основании равенства (2) получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!}-\frac{1}{(n+1)\ldots(n+m)}\right). \qquad (3)$$

Здесь $m!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m$ (читается: «m факториал»).

Такую сумму рассматривал немецкий математик Г.Лейбниц, когда в юности начал серьезно изучать математику. Правда, он находил сумму бесконечной последовательности слагаемых, т.е. сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m)}.$$

Эту задачу в числе других поставил перед ним Х.Гюйгенс, к которому Лейбниц обратился с просьбой помочь ему ликвидировать, как он выразился, его «математическое невежество». Мы можем найти решение задачи Гюйгенса, устремив в равенстве (3) n к бесконечности. Сумма ряда равна числу $S=(m\cdot m!)^{-1}$. Заметим, что Лейбниц не только быстро, но и столь успешно ликвидировал свое «математическое невежество», что сумел в течение десяти лет создать ни много ни мало новую область математики – дифференциальное и интегральное исчисление.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x)=x^m$. Обозначим

$$S_n^m=1^m+2^m+\ldots+n^m$$

и вычислим эту сумму для некоторых показателей m.

При $m=1$ имеем $f(x)=x$, $F(x)=x(x-1)/2$, и мы приходим к известной формуле

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Упражнение 3. Покажите, что при $m=2$, т.е. для $f(x)=x^2$, соответствующая функция $F(x)=x(x-1)(2x-1)/6$, а для функции $f(x)=x^3$ (т.е. при $m=3$) имеем $F(x)=x^2(x-1)^2/4$.

Отсюда находим

$$S_n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad S_n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Заметим, что в правой части последней формулы записан квадрат суммы S_n^1, поэтому возникает легко запоминающаяся формула

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2. \qquad (4)$$

Она была известна еще в Древней Греции. Но из-за отсутствия в то время алгебраической символики выводилась она геометрически. Древнегреческие математики для доказательства различных числовых свойств использовали изображение чисел при помощи камешков или точек на песке.

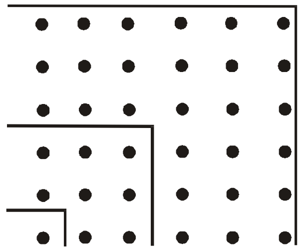

Рис. 2

Решая одну задачу (см. упражнение 17,г), Никомах (I в.) расположил точки в виде квадрата, сторона которого содержит 1 + 2 + 3 + … + n точек (рис.2). В этом квадрате он выделил угловую точку, за ней квадрат из 9 точек, потом из 36 точек и т.д. Полученные Г-образные фигуры греки называли гномонами [1]. Никомах показал, что из точек гномона с основанием k можно сложить куб с ребром k. Используя современную символику, читатели легко могут это доказать. А поскольку все гномоны составляют квадрат со стороной 1 + 2 + 3 + … + n, то формула (4) доказана.

Вернемся к вычислению сумм S_n^m. Как мы видим, в образовании $F(x)$ при m = 1, 2, 3 не прослеживается какой-либо закономерности, позволяющей найти эту функцию для любого m.

Упражнение 4. Покажите, что для $m=4$

$$F(x)=\frac{x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1)}{30}.$$

Тем не менее можно выработать алгоритм вычисления S_n^m, если обратиться к новой функции.

Назовем *обобщенной степенью числа* x произведение

$$x^{(m)}=x(x-1)\ldots(x-m+1).$$

Упражнение 5. Убедитесь, что

$$\Delta x^{(m+1)}=(m+1)x^{(m)}. \qquad (5)$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n}k^{(m)}=\frac{(n+1)^{(m+1)}}{m+1}. \qquad (6)$$

Получили замечательные формулы, напоминающие правила дифференцирования и интегрирования обычной степенной функции. Таким образом, для обобщенной степени проблема поиска функции F решена.

Покажем, как, используя обобщенную степень, найти

---

[1] γνω'μων – *распознаватель; сначала времени: простейшие солнечные часы состояли из двух планок, скрепленных в виде буквы Г, затем распознаватель перпендикулярности; позже так стали называть Г-образную фигуру, приложение которой к основной фигуре не меняет ее форму.*