Как найти сумму?

Л.ШИБАСОВ

Как найти сумму? Если речь идет о сложении двух или трех чисел – все ясно. Но часто нужно бывает найти сумму очень большого или вообще произвольного числа слагаемых, образующих некоторую последовательность. Эта задача уже не столь проста, и она привлекала внимание людей с глубокой древности, о чем сохранились легенды и письменные свидетельства.

В египетском папирусе, которому почти 4 тысячи лет, содержится записанная писцом Ахмесом задача-шутка: имеется 7 домов, в каждом доме 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь съедает 7 колосьев ячменя, из каждого колоса вырастает 7 мер ячменя. Найти сумму всех предметов. Решая задачу, Ахмес находит сумму пяти членов геометрической прогрессии.

О гораздо большем числе слагаемых, тоже образующих геометрическую прогрессию, идет речь в древней легенде об изобретении шахмат. Индийский царь Шерам, восхищенный этой игрой, решил отблагодарить ее изобретателя Сету и предложил тому любую награду. Сета попросил за первую клетку шахматной доски выдать ему одно пшеничное зерно, за вторую – два, за третью – 4, за четвертую – 8 и т.д. Царь приказал немедленно исполнить эту «смехотворную» просьбу. Каково же было его удивление, когда он узнал, что царедворцы не могут выполнить приказ своего повелителя. Ведь число зерен, причитавшихся изобретателю, так велико, что не только в царских кладовых, но и на всей Земле не нашлось бы такого количества зерна.

В более поздний период стали находить суммы слагаемых, устроенных посложнее. В XIV веке индийский математик Нарайана решил такую задачу: найти число коров и телок, появившихся от одной коровы за 20 лет, при условии, что корова в начале каждого года приносит телку, а телка дает такое же потомство в начале года, достигнув трех лет. Как он это сделал, мы узнаем позже.

Надо сказать, что вычисление сумм с древних времен носило не только занимательный характер. Оно служило и практическим целям. Еще задолго до нашей эры Архимед, применяя суммирование, нашел площадь параболического сегмента и объемы некоторых тел вращения. Этим же методом находили площади и объемы вплоть до XVII века, когда были созданы интегральное и дифференциальное исчисления, позволившие свести задачи вычисления мер к нахождению первообразной и применению формулы Ньютона—Лейбница. Но и сейчас вычисление сумм используется для решения различных задач интегрального исчисления. Это не единственная область математики, где нужны суммы. Широко применяются они в теории рядов, в различного рода приближенных вычислениях и, конечно, в теории чисел.

Теперь, когда, надеемся, читатели убедились в древности и важности проблемы суммирования, обратимся к конкретным задачам такого рода. Начнем с простой геометрической задачи.

Пример 1. На плоскости расположены две касающиеся друг друга внешним образом окружности единичного радиуса. К ним проведена внешняя касательная. В фигуру, заключенную между окружностями и касательной, вписывается круг, затем в образовавшуюся фигуру между данными окружностями и первым кругом вписывается второй круг и т.д. (рис.1). Спрашивается, какова суммарная длина диаметров вписанных кругов, полученных на n-м шаге.

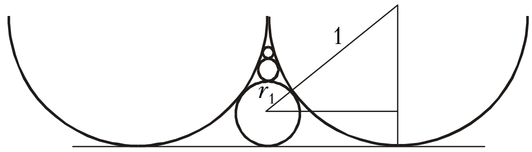

Рис. 1

Упражнение 1. Покажите, что диаметр k-го вписанного круга равен $\frac{1}{k(k+1)}$.

Итак, чтобы ответить на вопрос задачи, нужно найти сумму

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Для ее вычисления обратимся к равенству $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Применяя его к каждому слагаемому суммы, получаем ответ:

$$S = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Вообще говоря, найти компактную формулу, выражающую сумму n слагаемых (или, как говорят в математике, «записать результат в конечном виде»), удается очень редко. В школе выводят две формулы такого типа: для арифметической прогрессии

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+(n-1)d) = \frac{2a+(n-1)d}{2}\,n$$

и для геометрической прогрессии

$$S_n = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} = b\,\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Мы рассмотрим примеры вычисления более сложных сумм. При этом мы будем считать слагаемые значениями некоторой функции $f(x)$ в точках $x = 1, 2, \ldots, n$, а возникающую сумму $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ записывать в виде $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ (читается: «сумма чисел $f(k)$ по k от 1 до n»). В этих обозначениях результат примера 1 будет выглядеть так:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Решение оказалось очень простым за счет того, что по