Уравнения Пелля

В.СЕНДЕРОВ, А.СПИВАК

Всякое уравнение, имеющее несколько переменных, подлежит исследованию теории чисел. Но не все они одинаково доступны исследованию и не все имеют одинаковую важность по приложениям своим. Теория чисел до сих пор ограничивается только рассмотрением уравнений, наиболее простых и в то же время имеющих наиболее важные приложения.

П.Л.Чебышёв

Напишем уравнение и спросим, имеет ли оно решение в целых числах, – получится задача. Скорее всего, если уравнение взято «просто так», эта задача будет очень трудной (или вообще не поддастся решению), а главное, не будет никому интересна. Но есть уравнения, знакомство с которыми неизбежно и в высшей степени полезно для всякого, кто интересуется математикой. Именно таковы уравнения Пелля:

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где d – натуральное число, не являющееся точным квадратом.

Почему «не являющееся точным квадратом»? Потому что левую часть уравнения

$$x^2 - a^2y^2 = 1,$$

где a – натуральное число, можно разложить на множители:

$$(x - ay)(x + ay) = 1.$$

Число 1 можно представить в виде произведения двух целых чисел двумя способами: $1 \cdot 1$ и $-1 \cdot (-1)$. В первом случае $x - ay = 1$ и $x + ay = 1$, откуда $x = 1$ и $y = 0$. Во втором случае $x - ay = -1$ и $x + ay = -1$, откуда $x = -1$ и $y = 0$.

Итак, уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где $d = a^2$, решить очень легко. Ничего особенно интересного в нем нет – мы всего лишь разложили на множители разность квадратов. Действительно поразительные эффекты обнаружатся, когда d не будет точным квадратом.

Уравнениями Пелля можно заниматься по-разному. Что-то может понять даже семиклассник. Интересны эти уравнения и для студента мехмата МГУ – например, очень важная для математики 10-я проблема Гильберта, поставленная в августе 1900-го года в докладе на Международном математическом конгрессе в Париже, была решена в 1970 году Ю. Матиясевичем при помощи уравнений типа уравнений Пелля.

В этой статье будет рассказано как о самых простых свойствах решений уравнений Пелля, так и о весьма серьезных и трудных теоремах и задачах, связанных с этими замечательными уравнениями.

Иллюстрация В.Хлебниковой

Несколько примеров

Уравнение $x^2 - 2y^2 = \pm 1$

Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1.$$

Не удивляйтесь тому, что в правой части не 1, а ± 1. Поверьте, что так легче догадаться до закономерности, о которой вскоре пойдет речь.

Подбором найдем несколько решений: $(x; y) = (1; 0)$, $(1; 1)$ или $(3; 2)$. Продолжая вычисления, составим таблицу:

x	1	1	3	7	17	41	99	239
y	0	1	2	5	12	29	70	169
$x^2 - 2y^2$	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1

Если присмотреться, то можно заметить, что каждый следующий столбец получается из предыдущего по простому правилу: «новое» значение y есть сумма «старых» x и y, а «новое» значение x есть сумма «старого» и «нового» значений y. Точнее,

$$\begin{cases} X = x + 2y, \\ Y = x + y. \end{cases}$$

Конечно, таблицы с несколькими первыми решениями недостаточно для того, чтобы быть уверенным в справедливости этих формул для всего множества решений уравнения; мы должны доказать следующие утверждения.

Теорема 1. *Если* $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, *то пара чисел* $(X; Y) = (x + 2y; x + y)$ *удовлетворяет равенству* $X^2 - 2Y^2 = \mp 1$.

Следствие. *Уравнение* $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ *имеет бесконечно много решений в натуральных числах.*

Теорема 2. *Уравнение* $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ *не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения* $(1; 0)$ *при помощи правила* $(x; y) \to (x + 2y; x + y)$.

Доказать теорему 1 очень легко: достаточно подста-