Разрезания

Начнем с «занимательных» и не очень сложных задач.

1. Из шести фигурок, изображенных на рисунке 1, составьте квадрат.

(Ю.Аленков)

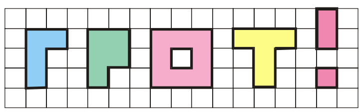

Рис. 1

2. Поверхность торта покрыта кремом двух сортов (рис.2). Одним

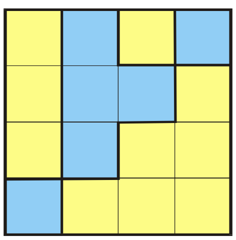

Рис. 2

прямым разрезом разделите торт на две части, чтобы на обеих было поровну крема каждого сорта.

(И. Жук)

3. Разрежьте изображенную на рисунке 3 фигуру на 5 равных частей так, чтобы в каждую часть попало по одному красному квадратику.

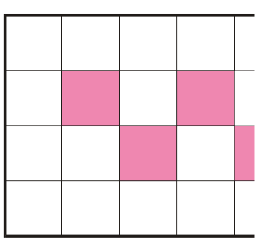

Рис. 3

4. Придумайте шестиугольник, который можно разрезать на два треугольника, но нельзя – на два четырехугольника.

(С.Волченков)

5. Разрежьте изображенную на рисунке 4 фигуру на 4 одинаковые по форме и площади части так, чтобы из них можно было сложить

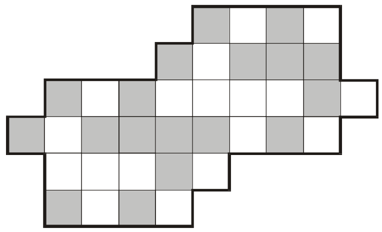

Рис. 4

квадрат размером 6×6 с шахматной раскраской.

6. Разрежьте любой треугольник на а) прямоугольные; б) равнобедренные треугольники.

7. Вовочка вырвал из куртки треугольный клок. Мама отнесла куртку в мастерскую и попросила поставить заплату. Мастер обнаружил, что у него есть треугольный кусок нужной ткани, но не той ориентации: нужна заплата в форме треугольника *ABC*, а ткань имеет форму треугольника *ADC, симметричного ABC* (рис.5). Подскажите, как разрезать заплату (т.е. треугольник *ADC*) на три части так, чтобы из них, не переворачивая, а лишь передви-

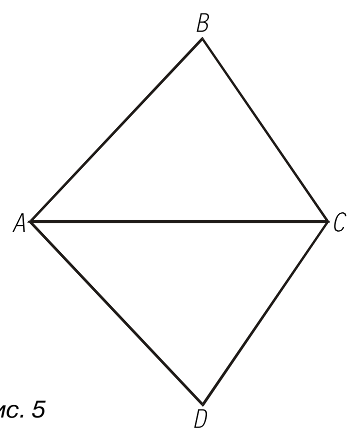

Рис. 5

гая и поворачивая, можно было сложить треугольник *ABC*. (Другими словами, докажите, что любой треугольник можно разрезать на три части, каждая из которых обладает осью симметрии.)

8. а) Разрежьте правильный шестиугольник на три равных пятиугольника. б) Легко разрезать плоскость на равные выпуклые пятиугольники (рис.6). Но у этого элементарного пятиугольника есть две параллельные стороны. Может ли

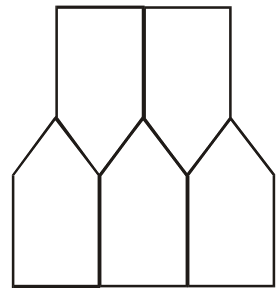

Рис. 6

элементарный пятиугольник не иметь параллельных сторон?

9 (М607). Разрежьте на равнобедренные трапеции а) равносторонний треугольник; б) квадрат; в) равнобедренный прямоугольный треугольник; г*) любой треугольник.

10 (М247). Квадрат 6×6 нужно разбить на k уголков и $12 - k$ прямоугольников (рис.7). При каких k это возможно?

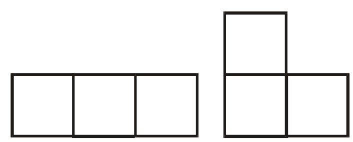

Рис. 7

11. Разрежьте плоскость на выпуклые семиугольники, площадь каждого из которых больше 1.

12. а) Если квадрат двумя прямыми разбит на четыре прямоугольника (рис.8) и сумма площадей двух

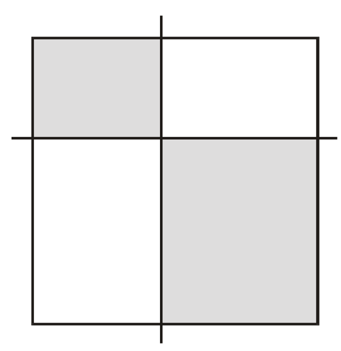

Рис. 8

из этих прямоугольников равна сумме площадей двух других, то хотя бы одна из осуществляющих разбиение прямых делит квадрат пополам. Докажите это.

б) Квадрат разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на прямоугольники, которые раскрашены в синий и красный цвета в

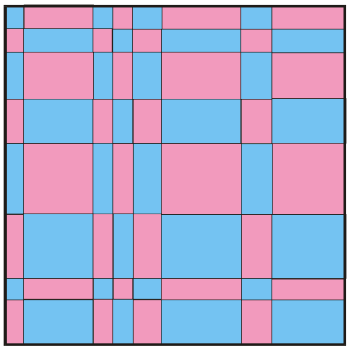

Рис. 9

шахматном порядке (рис.9). Оказалось, что сумма площадей синих прямоугольников равна сумме площадей красных прямоугольников. Докажите, что прямоугольники можно переместить так, что все синие прямоугольники составят один прямоугольник.

(В.Произволов)

13. Разрежьте квадрат размером 12×12 на шесть треугольников, длины всех сторон которых – целые.

(А.Шаповалов)

14*. Из прямоугольника размером 5×8 вырезали 4 клетки (на рисунке

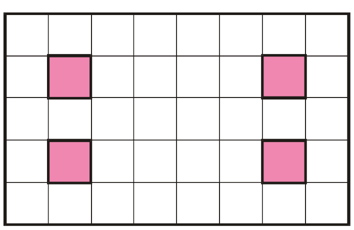

Рис. 10

10 они покрашены красным цветом). Разрежьте полученную фигуру на три части, из которых можно составить квадрат.

(Д.Калинин)

А сейчас займемся делом менее веселым, но более важным.

Теорема 1. *Любой многоугольник, у которого больше трех вершин, можно диагоналями разрезать на треугольники.*

Доказательство – индукция по количеству вершин, основанная на следующей основной лемме. Кому-то лемма может с первого взгляда показаться очевидной. Но, во-первых, не все очевидное верно; во-вторых, даже истинное утверждение не всегда легко доказать.

Лемма. *В любом многоугольнике, у которого больше трех вершин, можно провести диагональ, которая целиком лежит внутри многоугольника.*

Следствие из леммы. *Сумма углов любого n-угольника равна* $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Доказательство следствия – индукция по n.

Доказательство леммы. Введем систему координат так, чтобы абсциссы всех вершин многоугольника были разными. (Другими словами, ось абсцисс не должна быть перпендикулярна ни одной стороне или диагонали многоугольника.) Рассмотрим вершину многоугольника, у которой наибольшая абсцисса. Обозначим ее буквой B, а соседние вершины – буквами A и C (рис.11).

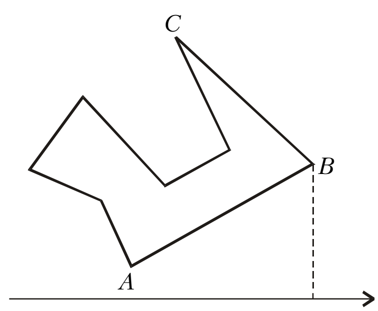

Рис. 11

Если внутри треугольника ABC нет вершин многоугольника, то диагональ AC – искомая. Если же такие вершины есть, то рассмотрим наиболее удаленную от прямой AC. Соединив ее с вершиной B, получим искомую диагональ.

Теперь – еще две задачи.

15 (М544). Какое наибольшее число вершин, из которых нельзя провести ни одной диагонали, целиком лежащей внутри многоугольника, может иметь n-угольник? Решите эту задачу сначала для $n = 4, 5, 6, 7$.

16 (М551). а) Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого пятиугольника, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах пятиугольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка? б) Тот же вопрос для выпуклого n-угольника.

Теорема 2. *Любой многоугольник можно разрезать на части, из которых можно сложить прямоугольник ширины 1.*

Доказательство теоремы 2 вы найдете в конце журнала.

Следствие (теорема Бойяи–Гервина). *Если площади двух многоугольников равны, то любой из них можно разрезать на части, из которых можно сложить второй многоугольник.*

Доказательство теоремы Бойяи–Гервина. Воспользовавшись утверждением теоремы 2, разрежем каждый из многоугольников на части и сложим из них прямоугольники ширины 1 (рис.12). Поскольку площади многоугольников равны, то прямоугольники одинаковые. Осталось провести на одном

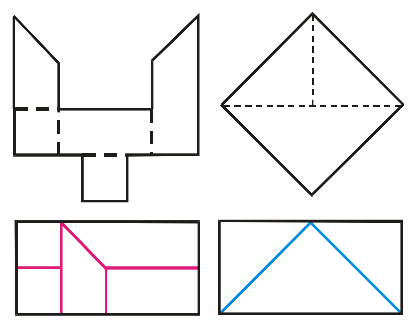

Рис. 12

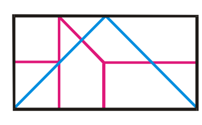

Рис. 13

прямоугольнике обе системы линий разреза (рис.13). Дальнейшее очевидно.

Материал подготовили
А.Жуков, А.Спивак