		Очки	Золото	Серебро	Бронза
8.	Украина	143	1	5	0
9.	Тайвань	141	1	5	0
10.	Вьетнам	139	1	4	0
11.	Турция	136	1	3	2
12.	Белоруссия	135	1	2	3
13.	Япония	134	1	3	2
14.	Германия	131	1	3	1
15.	Румыния	129	1	2	2
16.	Бразилия	120	0	4	2
17.	Израиль	113	1	2	1
18.	Иран	111	0	2	4
19–20.	Гонконг	107	0	2	4
19–20.	Польша	107	0	3	1

А вот результаты команд бывших союзных республик, не вошедших в первую двадцатку:

27.	Узбекистан	91	0	1	3
35.	Эстония	72	0	1	3
36–38.	Грузия	71	0	1	3
36–38.	Латвия	71	0	1	2
39.	Молдавия	70	0	2	1

Команды Азербайджана и Литвы завоевали по одной бронзовой медали.

В заключение хотелось бы выразить искреннюю благодарность ООО «Краниум» и лично Александру Анатольевичу Черепнину, оказавшим содействие в участии команды России в олимпиаде.

Задачи

1. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точка P – основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Известно, что $\angle BCA \ge \angle ABC + 30^\circ$. Докажите, что $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

(Южная Корея)

2. См. задачу М1804 «Задачника «Кванта».

3. См. задачу М1805 «Задачника «Кванта».

4. Пусть n – нечетное число, большее 1, и $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – данные целые числа. Для каждой из $n!$ перестановок $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел 1, 2, …, n положим

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i .$$

Докажите, что найдутся такие перестановки b и c, $b \ne c$, что $S(b) - S(c)$ делится на $n!$.

(Германия)

5. В треугольнике ABC биссектриса угла $\angle BAC$ пересекает сторону BC в точке P, а биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает сторону CA в точке Q. Известно, что $\angle BAC = 60^\circ$ и $AB + BP = AQ + QB$. Чему могут равняться значения углов треугольника ABC?

(Израиль)

6. Пусть a, b, c, d – целые числа такие, что $a > b > c > d > 0$. Предположим, что

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Докажите, что число $ab + cd$ не является простым.

(Болгария)

Решения

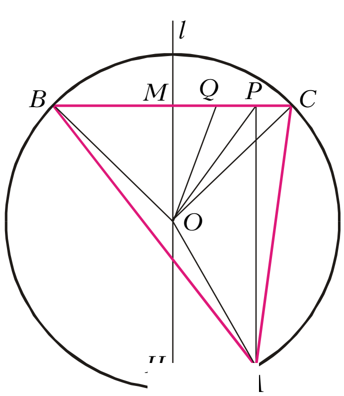

Рис. 1

Приведем решения задач, предложенные нашими школьниками на олимпиаде.

1. *Первое решение* (А.Халявин). Пусть M – середина BC, l – серединный перпендикуляр к отрезку BC, $AH \perp l$ (рис.1). Тогда из условия $\angle BCA > \angle ABC$ следует, что $P \in [MC]$. Пусть в ΔABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, R – радиус описанной окружности. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle BOA = 2\gamma$, $\angle BOM = \alpha = \pi - (\beta + \gamma) \Rightarrow \angle AOH = 2\gamma - (\pi - \angle BOM) = \gamma - \beta \ge 30^\circ$. Следовательно,

$$AH \ge AO \sin 30^\circ = \frac{R}{2}.$$

По условию задачи требуется доказать, что

$$\angle COP < 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - \alpha .$$

Для этого отметим на BC точку Q такую, что $\angle COQ = 90^\circ - \alpha$, и покажем, что $CQ > CP$. Из того, что

$$\angle OCB = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle BOC\right) = 90^\circ - \alpha = \angle COQ,$$

следует подобие треугольников COB и CQO. Поэтому

$$\frac{CQ}{CO} = \frac{CO}{CB} \Rightarrow CQ = \frac{R^2}{BC} > \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}.$$

С другой стороны,

$$CP = CM - PM = \frac{1}{2}BC - AH < \frac{1}{2} \cdot 2R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}.$$

Значит, $CQ > CP$, что и доказывает утверждение задачи.

Приведенное выше геометрическое решение было, конечно, далеко не единственным. Чаще школьники предлагали решения с применением тригонометрии.

Второе решение (А.Глазырин). Воспользуемся уже введенными обозначениями. Из равенства $\angle OCP = 90^\circ - \alpha$ следует, что условие задачи равносильно неравенству $\angle OCP > \angle COP \Leftrightarrow \Leftrightarrow OP > CP$. Но

$$CP = AC \cos\gamma = 2R \sin\beta \cos\gamma,$$

$$OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{1}{2}BC - CP\right)^2},$$

поэтому

$$CP < OP \Leftrightarrow CP^2 < OP^2 \Leftrightarrow 0 < OM^2 + \frac{1}{2}BC^2 - BC \cdot CP \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 0 < R^2 \cos^2\alpha + R^2 \sin^2\alpha - 2R \sin\alpha \cdot 2R \sin\beta \cos\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma < 1.$$

Пусть $\gamma - \beta = \delta$. По условию $\delta \ge 30^\circ$, поэтому

$$\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{2}\left(\sin(\beta+\gamma) - \sin(\gamma-\beta)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(180^\circ - \alpha\right) - \sin\delta\right) = \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\delta \le \frac{1}{4},$$

так как $30^\circ < \delta < 150^\circ$ ($\delta = \gamma - \beta < \gamma < 90^\circ$). Значит,

$$4 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma < \sin\alpha < 1.$$