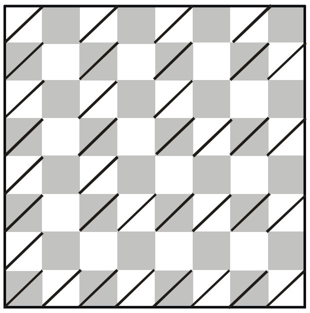

Рис. 2

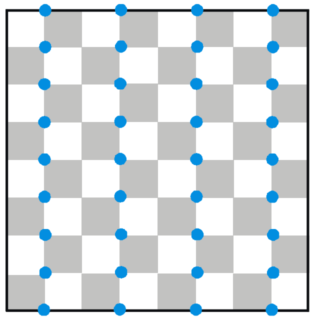

Рис. 3

Задача решена. Интересно, какое наименьшее число диагоналей можно провести так, чтобы никакие две из них не имели ни одной общей точки и нельзя было бы провести ни одной другой диагонали с соблюдением этого условия? На рисунке 4 вы видите 23 диагонали. Можно ли меньше – не знаем.

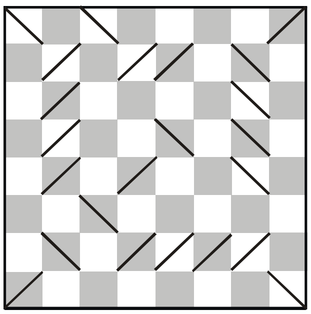

Рис. 4

3. При требуемой расстановке у каждого нечетного числа соседи должны быть разной четности (поскольку их разность, будучи делителем нечетного числа, нечетна). Значит, нечетные числа должны быть разбиты на пары, окруженные четными числами (рис.5). Но среди первых 2001 натуральных чисел нечетных имеется 1001, а 1001 – нечетное число.

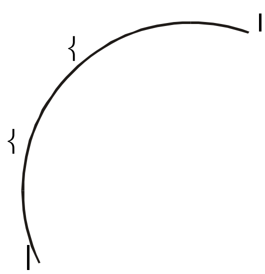

Рис. 5

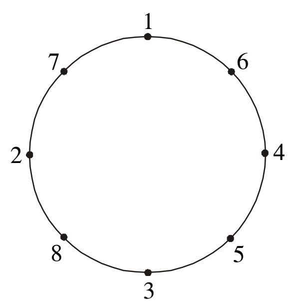

Рис. 6

Интересно, что первые 8 натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы каждое делилось на разность своих соседей (рис.6). Для каких еще чисел такая расстановка возможна, мы не знаем.

4. Рассмотрим жуков, у которых на исходной доске было по 4 соседа, т. е. жуков, занимавших «внутреннюю» часть доски. Их $15 \cdot 29 = 435$ штук. На новой доске у каждого такого жука опять-таки должно быть не меньше 4 соседей, поэтому все они должны попасть внутрь новой доски. Но $14 \cdot 31 = 434 < 435$.

Некоторые школьники предложили другое решение. Каждым двум жукам-соседям соответствует «перегородка» – общая сторона клеток, в которых они сидят. Число перегородок не должно уменьшиться. Но, как нетрудно подсчитать, оно уменьшается – с 914 до 913.

5. Сначала научимся получать числа от 2 до 210. Из числа 1 можно получить 2, увеличив на 100%. Из 2 можно получить 3 и 4, увеличив на 50% и 100% соответственно. Из 4 можно получить 5, увеличив на 25%. Из 5 можно получить любое число от 6 до 10, увеличивая на число процентов, кратное 20. Из 10 можно получить любое число от 11 до 20, увеличивая на число процентов, кратное 10. Из 20 – любое число от 21 до 25. Из 25 – от 26 до 50. Из 50 – от 51 до 100. Из 100 – от 101 до 200. Из 200 – любое из чисел 202, 204, 206, 208 и 210. Числа 201 и 207 – это увеличенные на 50% числа 134 и 138 соответственно. Число 203 получаем, увеличивая на 140 на 45%. Наконец, 209 – это увеличенное на 10% число 190.

Докажем, что простое число 211 получить нельзя. В самом деле, если 211 получено из числа m увеличением на n процентов, то

$$211 = m + \frac{mn}{100},$$

откуда

$$21100 = m(100 + n),$$

что невозможно из-за простоты числа 211.

6. Вообразите, что мы разработали способ, который для любого исходного количества монет позволяет выделить и оставить у нас меньшее число монет, причем среди оставшихся настоящих опять больше, чем фальшивых. Тогда мы рано или поздно дойдем до того, что монет останется одна или две; настоящих среди них будет больше, чем фальшивых, и поэтому все они будут настоящие.

Осталось придумать такой способ уменьшения числа монет. Разберем два случая.

Число монет четно. Разобьем их на пары и взвесим. Если весы при каком-то взвешивании показали равенство, то монеты либо обе настоящие, либо обе фальшивые. Равенств настоящих монет должно быть больше, чем равенств среди фальшивых (ибо настоящих монет было больше). В следующий этап проходят по одной монете из каждого такого равенства (которые останутся после того, как заберет плату хозяин весов).

Число монет нечетно. Разобьем их на несколько пар и еще одну монету. Произведя взвешивание в каждой паре, подсчитаем число возникших равенств. Если их оказалось нечетное число, то отберем, как и прежде, по одной монете из каждого равенства (так как равенств среди настоящих монет не может быть меньше, чем равенств среди фальшивых). Если же равенств четное число, то возьмем оставленные нам хозяином весов монеты из равенств и добавим к ним оставленную ранее в стороне монету. Настоящих монет опять больше, чем фальшивых. (Подумайте, почему!)

Задачи для самостоятельного решения

7. Целые числа x, y, z таковы, что числа $xy + 1$, $yz + 1$ и $zx + 1$ являются квадратами. Докажите, что произведение xyz кратно 8.

В.Сендеров

8. В клетках квадратной таблицы 3×3 расставлены числа 1, 2, 3, ..., 9 так, что сумма каждых четырех чисел, заполняющих