Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1811» или «Ф1818». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1811–М1815, Ф1818–Ф1822

М1811. Два джентльмена одновременно начинают прогулку из пунктов A и B, чтобы завершить ее, соответственно, в пунктах B и A (рис.1). В каждый момент времени скорости джентльменов равны по величине. Между A и B 1000 м, через каждые 100 м от аллеи AB отходит боковая аллея длиной 100 м. Поравнявшись с боковой аллеей, джентльмен может пройти по ней туда—обратно либо ее проигнорировать. Докажите, что встреча джентльменов неизбежна.

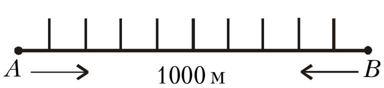

Рис.1

В.Произволов

М1812. Натуральные числа a, b и c таковы, что

$$\text{НОД}\left(a^2-1,\, b^2-1,\, c^2-1\right)=1.$$

Докажите, что

$$\text{НОД}(ab+c,\, bc+a,\, ca+b)=\text{НОД}(a,\, b,\, c).$$

(НОД – наибольший общий делитель.)

А.Голованов

М1813. Фигура F ограничена полуокружностью и двумя четвертушками окружности того же радиуса (рис.2).

а) Разрежьте F на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

б) Разрежьте F на четыре части так, чтобы одна из них являлась квадратом, а из трех других можно было сложить второй такой же квадрат.

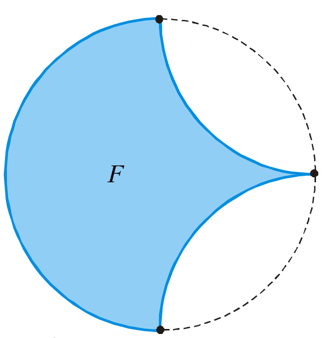

Рис.2

В.Произволов

М1814. Пусть a, m_1, m_2 – натуральные числа, причем a взаимно просто как с m_1, так и с m_2. Обозначим через r_n остаток от деления целой части числа a^n/m_1 на m_2 $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Докажите, что последовательность $\{r_n\}$ является периодической.

Н.Осипов

М1815. Общие перпендикуляры к противоположным сторонам неплоского четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

А.Заславский

Ф1818. На плоскости нарисован большой квадрат $АБВГ$ со стороной d. За какое минимальное время точка может проехать по пути $АБВГА$, если ее максимальное ускорение по величине не может превышать a?

З.Рафаилов

Ф1819. Тело массой M = 10 кг подвешено в лифте при помощи трех одинаковых легких веревок, натянутых вертикально. Одна из них привязана к потолку лифта, две другие – к полу. Веревки натянуты так, что в покое натяжение каждой из нижних веревок составляет F_0 = = 5 Н. Найдите силу натяжения верхней веревки при ускорении лифта, равном $a_1 = 1$ м/с^2 и направленном вверх. То же – при величине ускорения лифта $a_2 = 2$ м/с^2. Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

А.Веревкин

Ф1820. Толстостенная капиллярная трубка из стекла с внутренним диаметром 0,5 мм, внешним диаметром