КВАНТ · 2002/№2

Бревно в шалаше

К.ОСИПЕНКО, А.СПИВАК, В.ТИХОМИРОВ

В предыдущем номере журнала течение этой статьи прервалось в том месте, где было выведено уравнение астроиды:

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1.$$

Вот несколько упражнений.

Упражнения

9. Найдите длину кратчайшего отрезка с концами на осях координат, проходящего через точку $(a;\,b)$, где $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

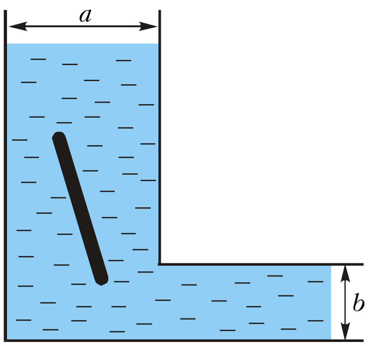

Рис.22

10. Канал, берега которого – параллельные прямые, поворачивает под прямым углом, причем до поворота его ширина равна a, после поворота – b (рис.22). При каких d через такой поворот может проплыть тонкое бревно длины d?

11. Рассмотрим круг диаметра 1, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2. Нарисуем траекторию какой-то точки катящейся окружности (рис.23). Докажите, что получится астроида.

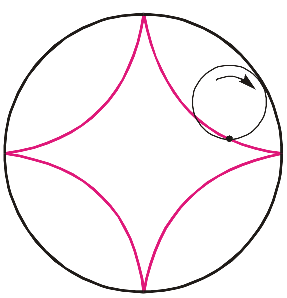
Рис.23

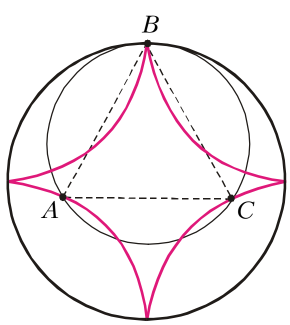

Рис.24

12. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, вписанный в круг диаметра 3, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2 (рис.24). Докажите, что точки A, B и C движутся по одной и той же кривой – астроиде.

Нормали к эллипсу

Очень красива огибающая для семейства нормалей к эллипсу. Эллипс, как известно, можно задать уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Нормаль к эллипсу найти легко, если эллипс задать параметрически:

$$(x;\,y)=(a\cos\varphi;\,b\sin\varphi).$$

(Это аналогично тому, как единичную окружность можно задать и уравнением $x^2+y^2=1$, и параметрически: $(x;y)=(\cos\varphi;\sin\varphi)$. Обдумайте это, если вы не встречались с этим раньше!)

Итак, x и y – функции параметра φ. Вычислим производные: $(x';\,y')=(-a\sin\varphi;\,b\cos\varphi)$. Если отложить вектор с такими координатами от точки $(x;\,y)$, то получим вектор, касающийся эллипса. (Как всякий вектор скорости, сказал бы физик.)

Легко проверить, что если вектор $(\alpha;\,\beta)$ отличен от нулевого вектора и перпендикулярен прямой l, проходящей через точку с координатами $(m;\,n)$, то прямую l можно задать уравнением $\alpha x+\beta y=\alpha m+\beta n$. (Докажите это!)

Поэтому уравнение нормали можно записать в виде

$$yb\cos\varphi-xa\sin\varphi=\left(b^2-a^2\right)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Теперь мы рассмотрим близкую к φ величину ψ (чтобы в конце концов перейти к пределу $\psi\to\varphi$) и составим систему уравнений

$$\begin{cases} yb\cos\varphi-xa\sin\varphi=\left(b^2-a^2\right)\sin\varphi\cos\varphi,\\ yb\cos\psi-xa\sin\psi=\left(b^2-a^2\right)\sin\psi\cos\psi.\end{cases}$$

Домножив первое уравнение на $\sin\psi$, второе – на $\sin\varphi$ и вычтя первое уравнение из второго, получим

$$yb(\cos\psi\sin\varphi-\cos\varphi\sin\psi)=$$

$$=\left(a^2-b^2\right)(\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi-\sin\psi\cos\psi\sin\varphi),$$

откуда

$$yb\sin(\varphi-\psi)=\left(a^2-b^2\right)\sin\varphi\sin\psi(\cos\varphi-\cos\psi).$$

Чтобы удобнее было перейти к пределу, перепишем это равенство следующим образом:

$$y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin\varphi\sin\psi\,\frac{\cos\varphi-\cos\psi}{\varphi-\psi}\cdot\frac{\varphi-\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Последний множитель стремится к 1 (это так называемый первый замечательный предел). Предпоследний множитель стремится к производной косинуса в точке φ. Значит, в пределе (при $\psi\to\varphi$) получаем

$$y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin^2\varphi(-\sin\varphi),$$

Окончание. Начало см.в «Кванте» №1.