

ВН. Поэтому

$$S_{DMC} = \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

6. $-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \pm 1, \pm\sqrt{3}$. Указание. Перепишем систему:

$$\begin{cases} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}x\right), \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}x\right). \end{cases}$$

1) Если единственное на $[0; 2\pi]$ решение x не совпадает с $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то из первого уравнения последней системы вытекает,

что числа x и $\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}x$ имеют равные по модулю ненулевые косинусы, и тогда второе уравнение приводит к равенству $a - \frac{2}{3} = \pm 1$, т.е. $a = -\frac{1}{3}$ или $a = \frac{5}{3}$.

Убедитесь, что при $a = -\frac{1}{3}$ уравнение действительно имеет единственное решение на отрезке $[0; 2\pi]$, а при $a = \frac{5}{3}$ такое решение не единственно.

2) Если $\frac{\pi}{2}$ – единственное решение системы на $[0; 2\pi]$, то $a = \pm\sqrt{3}$.

3) Если $x = \frac{3\pi}{2}$ – единственное решение системы на $[0; 2\pi]$, то

$$\begin{aligned} -1 &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2} \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2} \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{6-2a^2} = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}n, n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{6-2a^2} = \frac{2}{3}, 2 \Leftrightarrow a = \pm\frac{5}{3}, \pm 1. \end{aligned}$$

Осталось проверить найденные значения a .

Вариант 9

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}$. 2. -1 . 3. $(3; 4]$. 4. $(2\sqrt{3} - 3)/6$.

5. $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. Указание. Неравенство приводится к виду

$$(\log_{\pi}(\sin x) - \log_{\pi}(\sin 2x))^2 \geq 0,$$

а последнее неравенство верно на всей области допустимых значений.

6. Нельзя. Возьмем систему координат с началом в угловом дереве и осями, направленными вдоль сторон участка (рис.17). Два других дерева должны располагаться вне круга с центром в O и радиусом 2,5, т.е. на выделенном на рисунке участке. Разница абсцисс этих деревьев получится меньше 2,

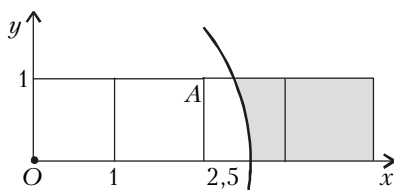


Рис. 17

а разница ординат – не больше 1. Следовательно, расстояние между ними будет меньше $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 2,5$, т.е. задание выполнить нельзя.

Вариант 10

1. $(1; 2] \cup (7; 8)$. 2. $\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, n, k \in \mathbf{Z}, n, k \geq 0$.

3. $3 \pm \sqrt{5}$.

4. а) $\frac{16}{3}$, центр вне треугольника;

б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$, центр внутри треугольника.

5. $(1; 5); \left(\frac{5}{2}; 2\right)$. Указание. Перейдите к переменным $u = \frac{xy}{2}, v = 2x + y - xy$.

6. 7 ч; 55 км. Выберем прямоугольную систему координат с центром в точке C . Без уменьшения общности можно считать, что точка A находится на положительной полуоси абсцисс, а точка B – на положительной полуоси ординат. Тогда, поскольку по условию $AC = CB = 275$ (км), через время t (ч) после начала движения координаты первого мотоциклиста суть $(275 - 44t; 0)$, а второго – $(0; 275 - 33t)$. Квадрат расстояния $r(t)$ между этими точками равен

$$\begin{aligned} r^2(t) &= (275 - 44t)^2 + (275 - 33t)^2 = \\ &= 11^2((25 - 4t)^2 + (25 - 3t)^2) = 55^2(t^2 - 14t + 50). \end{aligned}$$

Минимум функции

$$r(t) = 55\sqrt{t^2 - 14t + 50}$$

в силу свойств квадратного трехчлена достигается при $t_0 = 7$ и равен

$$r(t_0) = 55\sqrt{49 - 98 + 50} = 55.$$

7. $\frac{3}{4}$. Указание. Так как сфера в точке A касается плоскости ABC , ее диаметр AD перпендикулярен этой плоскости. Сечением сферы плоскостью ABD является окружность с диаметром AD , для которой AB – касательная, а BD – секущая. Из прямоугольного треугольника ABD находим BD , а затем BM . Аналогично находим отрезки CD и CN , а потом и MN из треугольника DMN .

8. $\{3\} \cup [\sqrt{10}; \sqrt{11}]$. Решение данного уравнения – это две непересекающиеся серии

$$\begin{cases} x_1 = \pi n, \\ x_2 = \frac{13}{4}(2\pi n + 1), \end{cases} n \in \mathbf{Z}.$$

Заметим, что расстояние между соседними точками первой серии равно π , а второй – $\frac{13\pi}{2}$. Длина отрезка, указанного в условии задачи,

$$l = (a^2 + 1)\pi - 2a\pi = (a - 1)^2\pi.$$

Всякий отрезок, длина которого $l < 4\pi$, содержит не более четырех корней первой серии и не более одного – второй. Если же $l \geq 6,5\pi$, то отрезок такой длины содержит как минимум шесть корней первой серии и по крайней мере один – второй. Таким образом, ровно шесть различных корней уравнения на данном отрезке могут быть лишь при условии

$$4\pi \leq (a - 1)^2\pi < 6,5\pi \Leftrightarrow 2 \leq |a - 1| < \sqrt{6,5}.$$

Принимая во внимание условие задачи $a \geq 1$, имеем

$$3 \leq a < 1 + \sqrt{6,5}.$$

Если $a = 3$, то отрезок $[6\pi; 10\pi]$ содержит пять корней 6π ,