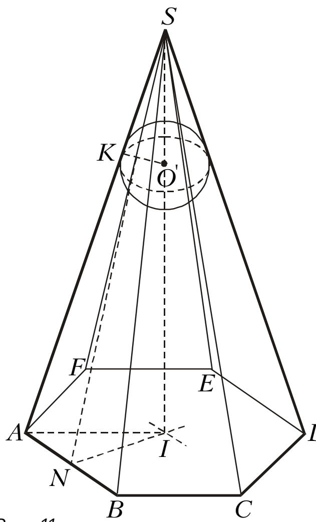

Рис. 11

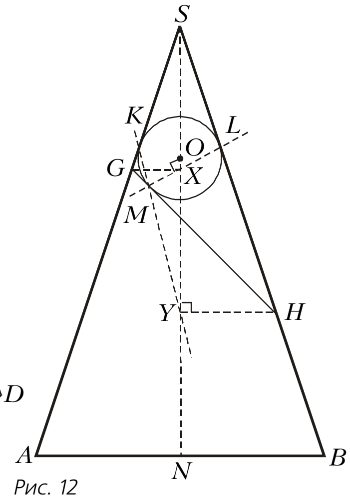

Рис. 12

Обозначим $AB = a$ и $GH = b$. Из доказанного утверждения следует, что точки пересечения прямых KM и LM с апофемой SN грани ASB являются проекциями точек G и H на эту апофему. Следовательно, так как по условию задачи апофема делится прямыми KM и LM на три равных отрезка, одна из этих точек делит ребро в отношении 1 : 2, а другая 2 : 1. Пусть для определенности $SA = SB = 3x$, $SG = x$ и $SH = 2x$. Пусть $\angle ASB = \varphi$.

Применим теорему косинусов к треугольнику ASB:

$$18x^2 - 18x^2\cos\varphi = a^2, \text{ откуда } \cos\varphi = 1 - \frac{a^2}{18x^2}.$$

Теорема косинусов для треугольника GSH дает

$$x^2 + 4x^2 - 4x^2\left(1 - \frac{a^2}{18x^2}\right) = b^2, \text{ откуда } x^2 = \frac{9b^2 - 2a^2}{9}.$$

Поэтому $SA = \sqrt{9b^2 - 2a^2}$.

Пусть $SI = h$ – высота пирамиды. $AI = a$, поскольку $ABCDEF$ – правильный шестиугольник. Тогда $h = \sqrt{9b^2 - 3a^2}$. Отсюда

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCDEF}\cdot h = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Пусть O' – центр сферы, $O'K = R$ – ее радиус. Из подобия прямоугольных треугольников SAI и $SO'K$ получаем $R = a\dfrac{SK}{h}$.

Используя теорему об отрезках касательных, выходящих из одной точки, имеем

$$SK = \frac{SG + SH - GH}{2} = \frac{\sqrt{9b^2 - 2a^2} - b}{2}.$$

Значит, $R = \dfrac{a\left(\sqrt{9b^2 - 2a^2} - b\right)}{2\sqrt{9b^2 - 3a^2}}$.

Подставляя данные задачи $a = 9$ и $b = 3\sqrt{11}$, находим ответ.

Вариант 4

1. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **2.** 119.

3. $\left(-\frac{9}{5}; \frac{12}{5}\right)$. *Указание.* Перепишите исходную систему в виде

$$\begin{cases} y \le -3x - 3, \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 \le 4^2. \end{cases}$$

Поскольку значение функции

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = (x-3)^2 + (y-4)^2$$

равно квадрату расстояния r между точками $(x; y)$ и $(3; 4)$, то на множестве решений системы функция $f(x; y)$ принимает минимальное значение в точке, ближайшей к точке $(3; 4)$ (рис.13).

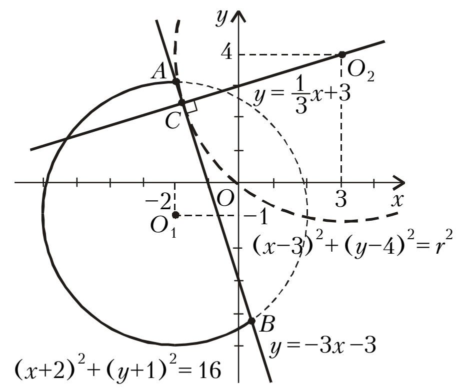

Рис. 13

4. $(4n+1)^2$, где $n \ge 0$ – целое. *Указание.* Приведем исходное уравнение к виду

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(6x + 15\sqrt{x}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(2x - 13\sqrt{x}\right)\right) = 2.$$

Так как значение синуса не превосходит 1, это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(6x + 15\sqrt{x}\right)\right) = 1, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(2x - 13\sqrt{x}\right)\right) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15\sqrt{x} = 4k + 1, & k \in Z, \\ 2x - 13\sqrt{x} = 4l + 1, & l \in Z. \end{cases} \quad (1)$$

Решения системы (1) суть такие значения x ($x \ne 0$), для которых существуют некоторые целые k и l, удовлетворяющие уравнениям системы.

Докажем, что любое такое число x является квадратом целого числа. Вычитая из первого уравнения системы утроенное второе, получаем равенство

$$27\sqrt{x} = 2k - 6l - 1,$$

из которого следует, что $\sqrt{x} = p/q$, где p и q – взаимно простые нечетные натуральные числа. Тогда из второго уравнения системы (1) получим

$$2p^2 = q\left(13p + (4l+1)q\right),$$

что невозможно при нечетном $q > 1$.

Итак, $x = m^2$ – квадрат натурального числа.

Рассматривая остатки от деления числа m на 4, приходим к выводу, что система имеет решения в целых числах тогда и только тогда, когда число m равно $4n + 1$, $n \in Z$, т.е. $x = (4n+1)^2$, где $n \in Z$, $n \ge 0$.

5. $8 + 4\sqrt{6} - 10\arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)$.

Пусть в трапеции $ABCD$ $AD \| BC$, $BC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (рис.14). Так как трапеция вписана в окружность, то она равнобокая: $AB = CD$. Пусть M и N – середины оснований трапеции BC и AD соответственно, тогда MN – высота трапеции, $MN = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Центр O описанной около трапеции окружности лежит на