$\left(-\arccos\left(\frac{27}{28}\right)+2\pi m;\ -\arcsin\left(\frac{17}{28}\right)+2\pi n\right);\ m,n\in\boldsymbol{Z}\Big\}.$

3. 10 км/ч. *Указание.* Рассмотрите два случая: 1) встреча произошла до момента или в момент изменения скорости первым велосипедистом;
2) встреча произошла после изменения скорости первым велосипедистом.

4. $\frac{192}{17}$ или $\frac{1728}{25}=69{,}12$. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм (рис.8), O_1, O_2, O_3 и O_4 – центры окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD и AOD соответственно. Пусть $\angle AOB=\varphi$ $(0<\varphi<\pi)$. Так как O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 и O_1O_4 являются серединными перпендикулярами к отрезкам BO, CO, DO и AO соответственно, то $O_1O_2O_3O_4$ – параллелограмм, причем $\angle O_1O_4O_3=\angle AOB=\varphi$. Пусть E – проекция точки O_3 на прямую O_1O_4. Поскольку $AO=OC$, имеем $O_3E=AO$. Тогда $AO=O_3O_4\cdot\sin\varphi=16\sin\varphi$. По следствию из теоремы синусов для треугольника ABO, в котором известен радиус описанной окружности $R=5$, получаем $AB=2R\sin\varphi=10\sin\varphi$.

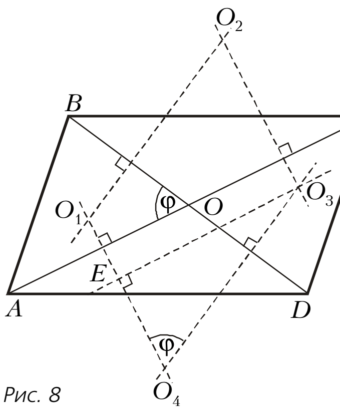

Рис. 8

В том же треугольнике $BO=\frac{BD}{2}=6$, следовательно, по теореме косинусов

$$AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos\varphi,$$

т.е.

$$100\sin^2\varphi=256\sin^2\varphi+36-192\sin\varphi\cos\varphi.$$

Поделив полученное равенство на $12\sin^2\varphi$ $(\sin^2\varphi\neq0)$, приходим к квадратному уравнению

$$3\operatorname{ctg}^2\varphi-16\operatorname{ctg}\varphi+16=0.$$

Отсюда имеем два решения

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{4}{3}\ \text{или}\ \operatorname{ctg}\varphi=4.$$

Дальнейшие вычисления очевидны.

5. $\left[-3-\frac{1}{\sqrt3};3\right)\cup\left(-3;-3+\frac{1}{\sqrt3}\right]$ при $a\in\left(-\infty;-\frac14\right]$;

$$\left(-4;-3-\varphi(a)\right]\cup\left[-3-\frac{1}{\sqrt3};-3\right)\cup$$
$$\cup\left(-3;-3+\frac{1}{\sqrt3}\right]\cup\left[-3+\varphi(a);-2\right)\ \text{при}\ a\in\left(-\frac14;\frac{1}{10}\right);$$
$$(-4;-3)\cup(-3;-2)\ \text{при}\ a=\frac{1}{10};$$
$$\left(-4;-3-\frac{1}{\sqrt3}\right]\cup\left[-3-\varphi(a);-3\right)\cup$$
$$\cup\left(-3;-3+\varphi(a)\right]\cup\left[-3+\frac{1}{\sqrt3};-2\right)\ \text{при}\ a\in\left(\frac{1}{10};\frac13\right);$$
$$\left(-4;-3-\frac{1}{\sqrt3}\right]\cup\left[-3+\frac{1}{\sqrt3};-2\right)\ \text{при}\ a\in\left[\frac13;+\infty\right).$$

Здесь использовано обозначение $\varphi(a)=\left(\frac{1-3a}{a+2}\right)^{\log_3\sqrt{\frac{a+2}{1-3a}}}$.

Указание. Выполнив замену

$$t=3^{-2\cdot\sqrt{-\log_{81}\left(x^2+6x+9\right)}}=3^{-2\cdot\sqrt{-\log_9|x+3|}},$$

после преобразований приходим к системе неравенств

$$\begin{cases}3(a+2)t^2+(8a-5)t-(3a-1)\ge0,\\0<t<1.\end{cases}$$

6. $729\sqrt6$; $\frac{27-3\sqrt{11}}{4\sqrt2}$.

Докажем вспомогательное
Утверждение. Пусть в треугольник GSH вписана окружность с центром в точке O, касающаяся его сторон GS и GH в точках K и M соответственно. Прямая KM пересекает прямую SO в точке P. Тогда $\angle SPH=90^\circ$.
Доказательство. 1) Если треугольник GSH равнобедренный, $GS=SH$, то точки P и M совпадают. SM является биссектрисой, медианой и высотой треугольника GSH, поэтому угол SPH – прямой.
2) Пусть $SH<GS$. Тогда точки H и M лежат по одну сторону от прямой SO, а P лежит внутри треугольника GSH (рис.9).

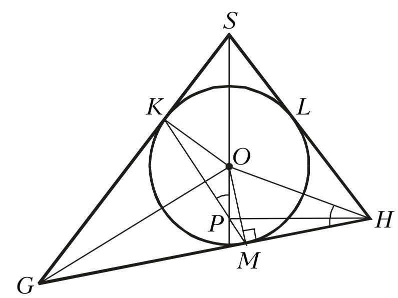

Рис. 9

Пусть $\angle GSH=\alpha$, $\angle SGH=\beta$, $\angle SHG=\gamma$.
Поскольку углы OKG и OMG – прямые, точки O, K, G, M лежат на одной окружности, следовательно, $\angle OKM=$ $=\angle OGM=\frac{\beta}{2}$. Тогда из треугольника SKP имеем

$$\angle SPK=\pi-\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\gamma}{2}.$$

Поэтому $\angle OPM+\angle OHM=\pi$, следовательно, выпуклый четырехугольник $OPMH$ является вписанным в некоторую окружность. Но тогда $\angle OPH=\angle OMH=90^\circ$.
3) Пусть теперь $SH>GS$. Тогда точки H и M лежат по разные стороны от прямой SO, а P находится вне треугольника GSH (рис.10).
Дословно повторяя рассуждения п.2), получаем

$$\angle OKM=\angle OGM=\frac{\beta}{2},$$

поэтому $\angle SPK=\frac{\gamma}{2}$. Так как равные углы OPM и OHM опираются на один и тот же отрезок OM, а их вершины P и H находятся по одну сторону от прямой OM, то существует окружность, проходящая через точки O, H, P, M. Следовательно, $\angle OPH=\angle OMH=90^\circ$. Утверждение доказано.

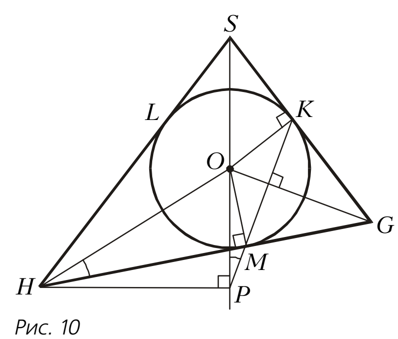

Рис. 10

Сфера, о которой идет речь в условии задачи, в пересечении с плоскостью ASB дает окружность, вписанную в треугольник GSH. Последний отсекается от треугольника ASB плоскостью, касающейся сферы в точке M (рис.11 и 12).