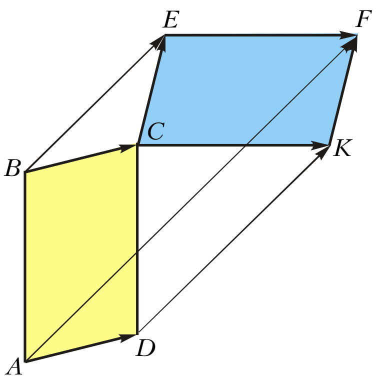

Рис. 1

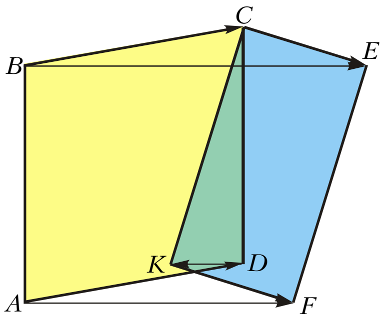

Рис. 2

3. а) Верно. Пусть x – наименьшее, а X – наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. При указанном в условии задачи преобразовании числа x и X могут перейти либо сами в себя (при $a > 0$), либо друг в друга (при $a < 0$). В первом случае из равенств

$$\begin{cases} x = ax + b, \\ X = aX + b \end{cases}$$

находим $a = 1$;

во втором – из равенств

$$\begin{cases} X = ax + b, \\ x = aX + b \end{cases}$$

находим $a = -1$.

б) Неверно. Для доказательства достаточно, например, рассмотреть преобразование с параметрами $a = -1$ и $b = 11$ десяти натуральных чисел 1, 2, …, 10.

4. Нет.

Докажем это методом «от противного». Допустим, такая расстановка возможна. Пронумеруем вертикали слева направо, а горизонтали – снизу вверх. Рассмотрим различные варианты.

1) На первой горизонтали – 1 пешка. Тогда на второй горизонтали – 3 пешки. На третьей горизонтали должно быть либо в 3 раза больше, либо в 3 раза меньше пешек, чем на второй, т.е. либо 9, либо 1. Так как в каждой горизонтали 8 клеток, то первое невозможно, поэтому на третьей горизонтали стоит 1 пешка. Далее, рассуждая так же, получаем, что на четвертой горизонтали стоят снова 3 пешки, на пятой – опять одна и т.д. Тогда суммарное число пешек на доске равно 1 + + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 = 16.

Если же на первой горизонтали стоят 3 пешки, то ситуация получается та же, но «в обратном порядке», т.е. на второй горизонтали – 1 пешка, на третьей – 3, на четвертой – снова 1 и т.д., и всего на доске такое же самое количество пешек: 16.

2) На первой горизонтали – 2 пешки. Рассуждая аналогично, выясняем, что на второй горизонтали находятся 6 пешек, на третьей – 2, на четвертой – снова 6, на пятой – опять 2 и т.д. Тогда суммарное число пешек на доске равно 2 + 6 + 2 + 6 + 2 + 6 + 2 + 6 = 32.

Ну а если на первой горизонтали стоят, наоборот, 6 пешек, то ситуация получается та же, но в «обратном порядке», и количество пешек на доске то же самое: 32.

3) Остальные значения количества пешек на первой горизонтали: 4, 5, 7 или 8 – невозможны, так как эти значения не делятся на 3, поэтому на второй горизонтали может быть лишь втрое больше пешек (но не втрое меньше), однако втрое большее количество пешек во всех случаях больше 8.

Итак, общий вывод: на доске либо 16, либо 32 пешки.

Рассмотрим теперь первые две вертикали. На одной из них вдвое больше пешек, чем на второй. Пусть на той вертикали, где меньше пешек, их количество равно n. Тогда на другой вертикали число пешек равно $2n$. Суммарное же количество пешек на первых двух вертикалях равно $n + 2n = 3n$, т.е. делится на 3. Аналогично, суммарные количества пешек на 3-й и 4-й вертикалях, на 5-й и 6-й вертикалях, на 7-й и 8-й вертикалях также делятся на 3. Поэтому и суммарное количество пешек на всех вертикалях (т.е., собственно, на всей доске) делится на 3. Но, как мы знаем, общее количество пешек равно либо 16, либо 32, что на 3 не делится. Противоречие!

5. а) Примем сторону одного маленького квадратика за 1, и пусть квадрат $ABCD$ – это наш гриб. Проекции одного червяка на стороны AB и AD – отрезки длин m и n – натуральные числа. Ясно, что червяк целиком умещается в прямоугольнике $m \times n$; в частности, так как площадь червяка равна 5, $mn \geq 5$. Легко проверить, что тогда и $m + n \geq 5$. Рассмотрим теперь все проекции 13 червяков на стороны AB или AD. В силу вышесказанного, сумма этих 26 отрезков не меньше чем $13 \times 5 = 65$. Но сумма длин AB и AD равна 32. Так как $2 \times 32 = 64 < 65$, то найдется точка на одной из сторон AB или AD, которая принадлежит проекциям на эту сторону по крайней мере трех червяков. Разрез, проходящий через эту точку перпендикулярно стороне, которой она принадлежит, пройдет через всех червяков, в чьих проекциях она содержится.

б) Нет. Нетрудно поместить четырех червяков в квадрат 5×5 так, чтобы любая прямая, параллельная стороне квадрата, пересекала не более двух червяков (рис.3). Расположив три таких квадрата 5×5 «по диагонали» в квадрате 16×16, получим пример 12 червяков, никаких трех из которых нельзя пересечь линией, параллельной стороне квадрата.

Рис. 3

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Ускорение: а) направлено вертикально вниз; б) отклонено от вертикали в направлении, противоположном движению снаряда.

2. Выталкивающая сила, действующая в воздухе на шар, больше выталкивающей силы, приложенной к гире, поскольку объем шара больше объема гири. В вакууме выталкивающие силы исчезнут, и шар перетянет.

3. Нет. Жидкость в трубке находится в неустойчивом равновесии, поэтому во втором случае ртуть, скорее всего, вытечет из трубки, а в образовавшийся вакуум ворвется вода.

4. Если над ртутью воздух отсутствует, объем пузырька меняться не будет.

5. На верхний торец трубки сверху действует сила атмосферного давления, которая ничем не компенсируется, так как над ртутью в трубке вакуум. Поэтому показания динамометра являются суммой веса трубки и силы атмосферного давления.

6. Нагнетающие насосы будут, всасывающие – нет.

7. При откачивании воздуха внутреннее давление воздуха в пузырьке становится больше внешнего, поэтому пузырек раздувается.

8. На уровне жидкости в сосуде давление равно нулю. А давление в точке, находящейся выше уровня жидкости в сосуде, меньше давления на этом уровне, значит, давление отрицательное – жидкость растянута.

9. Нет. Например, в очень высокой вертикальной трубе (сравнимой с высотой атмосферы) воздух займет лишь нижнюю ее часть.

10. Для уменьшения теплопроводности.

11. Путем излучения, так как теплопроводность или конвекция в межпланетных пространствах практически невозможны.

12. Нет. Изменение температуры тела будет зависеть от ба-