Задачи заочного тура олимпиады

Физика

- **1.** Два тела бросили одновременно из одной точки: одно вертикально вверх, другое под углом $\theta=60^\circ$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела равна $v_0=25\,$ м/с . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите расстояние между телами через $\tau=1,7\,$ с . (10 баллов)
- **2.** Под каким углом к горизонту надо бросить тело массой M, чтобы максимальная высота его подъема равнялась дальности полета, если на тело действует с постоянной силой F горизонтальный попутный ветер? Ускорение свободного падения равно g. (10 баллов)
- **3.** На столе лежит доска массой M, на одном конце которой находится брусок массой m. Бруску сообщают скорость v_0 вдоль доски. Какое время вся система будет находиться в движении, если коэффициент трения между доской и бруском μ_1 , а между доской и столом μ_2 ? (10 баллов)
- **4.** Температура одного моля идеального одноатомного газа меняется по закону $T = aV^2$. Найдите теплоемкость газа в этом процессе. Универсальная газовая постоянная равна R. (10 баллов)
- **5.** В цилиндре под поршнем находится воздух при температуре $t_1=100~^{\circ}\mathrm{C}$, имеющий относительную влажность $\phi=40\%$. Во сколько раз следует изменить объем воздуха, чтобы при его охлаждении до температуры $t_2=20~^{\circ}\mathrm{C}$ на стенках сосуда выпала роса? Нормальное атмосферное давление $p_0=10^5~\mathrm{Ha}$, давление насыщенного водяного пара при температуре $20~^{\circ}\mathrm{C}$ $p_{_{\mathrm{H}}}=2,3\cdot10^3~\mathrm{Ha}$. (10 баллов) **6.** В двухэлектродной лампе напряжение между плоскими
- **6.** В двухэлектродной лампе напряжение между плоскими электродами составляет 22 кВ. Электроны ударяют об анод с общей силой 1 мкН. Удары неупругие. Какой силы ток течет через лампу? Отношение заряда электрона к его массе равно $1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. (10 баллов)
- 7. Пучок протонов влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл перпендикулярно линиям индукции. Протоны движутся по дуге окружности радиусом 20 см и попадают на заземленную мишень. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в мишени, если сила тока в пучке 0,1 мА. Отношение заряда протона к его массе равно 0,96 · 10⁸ Кл/кг. (10 баллов)
- **8.** На луче OA (см. рисунок) расположено бесконечное множество точечных зарядов величиной q так, что расстояние между очередными двумя соседними зарядами удваива-

ется. Определите потенциал поля в точке О (начало луча), где заряда нет, а до перво-

го заряда расстояние равно R. Электрическая постоянная равна ε_0 . (10 баллов)

- 9. В области пространства, где имеются одновременно однородное магнитное поле с индукцией B=0,2 Тл и однородное электрическое поле с напряженностью E, движется электрический заряд. Известно, что в тот момент времени, когда скорость заряда равна v=500~м/c и направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции, ускорение заряда равно нулю. Пренебрегая силой тяжести, определите величину напряженности электрического поля. (10 баллов)
- **10.** Непрерывное излучение лазера мощностью 600 Вт продолжалось 20 мс. Излученный свет попал на кусочек идеально отражающей фольги массой 2 мг, расположенный перпендикулярно направлению распространения света. Какую скорость приобрел кусочек фольги? (10 баллов)

Математика

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x+5} < \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}$$
. (20 баллов)

2. Проверьте справедливость равенства

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arcctg} \frac{2}{11}$$
. (20 баллов)

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg \sqrt{x^2} . (10 \text{ баллов})$$

- **4.** Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем оценок 3 больше, чем пятерок, но меньше, чем оценок 4. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число оценок 5 было четным. Определите, сколько каких оценок получила группа. (25 баллов)
- **5.** В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом 30° проведена высота CD из вершины прямого угла C. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, если меньший катет треугольника ABC равен 1. (25 баллов)

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Конкурс«Математика 6-8»

(см. «Квант» №4 за 2001 г.)

1. Преобразовав выражение в правой части исходного тождества к виду

 $a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3bc^2 + 3b^2c - 18abc$ А, запишем разность между правой и левой его частями:

$$3(ab^2 + ac^2 + a^2b + a^2c + bc^2 + b^2c - 6abc) = 0.$$

Последнее равенство равносильно тождеству

$$a(b-c)^{2} + b(c-a)^{2} + c(a-b)^{2} = 0$$
.

Поскольку числа a, b, c положительны, то это равенство возможно лишь в одном единственном случае: a = b = c.

2. Для произвольных точек A, B, C, D, E, F, K плоскости

справедливы векторные равенства

$$\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DK} + \vec{KF}, \quad \vec{CE} = \vec{BE} - \vec{BC}.$$

Учитывая, что для параллелограммов *ABCD* и *CEFK* справедливы равенства

$$\vec{KF} = \vec{CE}$$
, $\vec{AD} = \vec{BC}$,

выводим

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{BE} \cdot A$$

По условию $\overrightarrow{DK}||\overrightarrow{BE}$, поэтому $\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{BE}$. Векторы \overrightarrow{DK} и \overrightarrow{BE} могут быть сонаправлены (рис.1) или противоположно направлены (рис.2). В первом случае $|\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{BE}| + |\overrightarrow{DK}| = a + b$; во втором случае $|\overrightarrow{AF}| = a - b$ или $|\overrightarrow{AF}| = b - a$ в зависимости от того, какой из векторов \overrightarrow{BE} или \overrightarrow{DK} длиннее.