Для некоторых из перечисленных свойств доказательства того, что они определяют окружность, совсем элементарны. Для других, напротив, весьма сложны. Наиболее интересны доказательства признаков 2 и 6. (Попробуйте найти их самостоятельно; если не получится — см. ниже.)

А теперь приведем несколько красивых свойств окружности, которыми обладают и другие кривые.

1. Окружность является *кривой постоянной ширины.* Это значит, что если провести к окружности две параллельные касательные, то расстояние между ними не зависит от их направления (рис.8). Как ни стран-

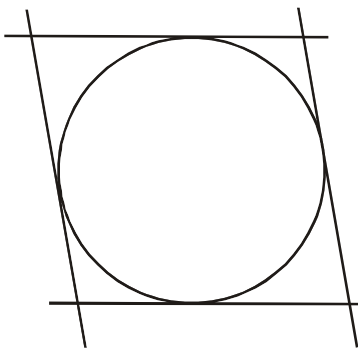

Рис. 8

но, этим свойством обладают многие кривые, в том числе довольно сильно отличающиеся от окружности. Наиболее простая из них, так называемый *треугольник Рело*, изображена на рисунке 9. Он состоит из трех дуг окружностей, центры

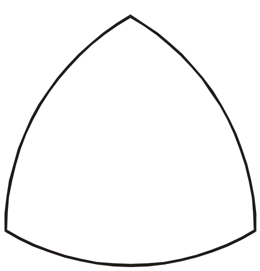

Рис. 9

которых расположены в вершинах правильного треугольника, а радиусы равны его стороне. Если изготовить несколько катков, поперечные сечения которых являются кривыми постоянной ширины, то можно перевозить на них плоскую платформу, и она не будет перемещаться вверх и вниз (рис.10). Отметим так-

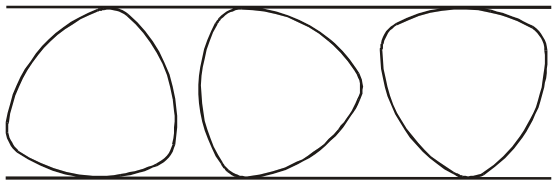

Рис. 10

же, что все кривые данной постоянной ширины имеют одну и ту же длину.

2. Любая прямая, которая делит пополам периметр окружности, делит пополам и площадь ограниченного ей круга. Разумеется, помимо окружности этим свойством обладают любые кривые, имеющие центр симметрии. Гораздо интереснее то, что обладать им могут и несимметричные кривые, в том числе и выпуклые. Одна из них изображе-

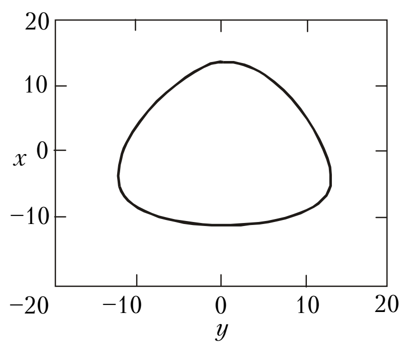

Рис. 11

на на рисунке 11. Ее можно задать следующими уравнениями:

$$x = 12\cos\varphi + \cos 2\varphi + 1/2\cos 4\varphi,$$

$$y = 12\sin\varphi - \sin 2\varphi + 1/2\sin 4\varphi,$$

где φ меняется от 0 до 2π.

Доказательства признаков 2 и 6.

2. Пусть дана выпуклая гладкая кривая, касательные к которой из любой точки равны. Возьмем произвольную точку A вне кривой и проведем касательные AB' и AC'.

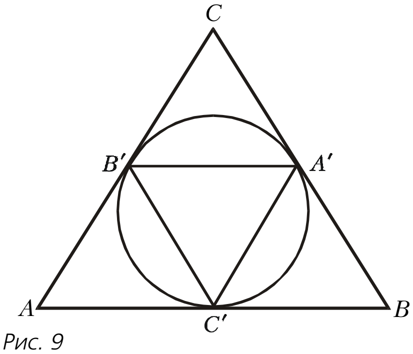

Рис. 9

Докажем, что для всех точек A', лежащих на дуге $B'C'$ (одной и той же), углы $B'A'C'$ совпадают.

Проведем через A' касательную к кривой и найдем точки B и C ее пересечения с AC' и AB' (рис.12). По условию треугольники $B'A'C'$ и $C'A'B'$ равнобедренные, следовательно:

$$\angle BA'C' = \frac{\pi - \angle CBA}{2},$$

$$\angle CA'B' = \frac{\pi - \angle ACB}{2}$$

$$\angle C'A'B' = \pi - \angle BA'C' - \angle CA'B' =$$

$$= \frac{\angle CBA + \angle BCA}{2} = \frac{\pi - \angle BAC}{2}.$$

Таким образом угол, под которым видна хорда $B'C'$, не зависит от выбора точки на дуге. Для второй дуги доказательство аналогично. По признаку 1 кривая является окружностью.

6. Прежде всего отметим, что в любую замкнутую кривую можно вписать правильный треугольник. Действительно, возьмем на кривой произвольную точку A и повернем кривую вокруг A на $\pi/3$. Точка пересечения старого и нового положения кривой, отличная от A будет второй вершиной треугольника.

Итак пусть правильный треугольник с центром O вписан в нашу кривую. Повернем ее вокруг O на угол $2\pi/3$. Старое и новое положение кривой пересекаются, по крайней мере, в трех точках (вершинах треугольника) и, значит, совпадают, т.е. O является центром симметрии 3 порядка. Рассмотрим теперь поворот кривой вокруг O на произвольный угол ϕ. Если старое и новое положение кривой не совпадают, то число точек их пересечения кратно 3 (в силу симметрии) и не равно 0 (иначе одна кривая лежала бы целиком внутри другой, что для конгруэнтных кривых невозможно). Следовательно, кривая переходит в себя при любом повороте вокруг O, т.е. является окружностью.

А.Заславский