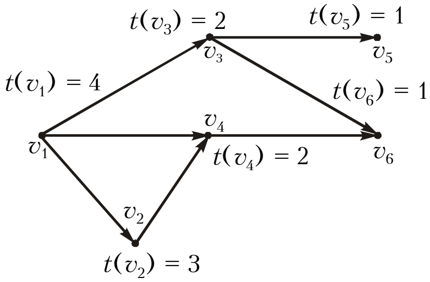

Рис.1

Поместим людоеда, соответствующего точке v, в комнату с номером $t(v)$. Докажем, что это нужное размещение. Для этого докажем, что среди точек с одинаковыми метками нет точек, соединенных линией.

Действительно, если линия (u,v) принадлежит схеме, получившейся после удаления части линий, то $t(u) > t(v)$. Если (u,v) – удаленная линия, то из минимальности удаленных линий следует, что, добавив к последней схеме эту линию, получим цикл (рис.2).

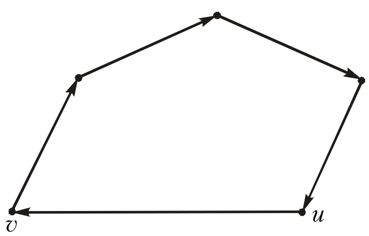

Рис.2

Поэтому $t(v) > t(u)$.

О.Мельников

M1776.[1] *Час назад каждый брат в семье был в ссоре с одинаковым количеством сестер, а каждая сестра – с различным количеством братьев. Сейчас некоторые из них помирились, и каждая сестра в ссоре с одинаковым количеством братьев, а каждый брат – с различным количеством сестер. Сколько сестер и братьев в этой беспокойной семье?*

Обозначим через n количество братьев, через m – количество сестер; пусть до примирения каждый брат был в ссоре с k сестрами. Из условия задачи следует, что $n \ge 2$, $m \ge 3$.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

1°. $m \le n$.

Доказательство. Пронумеруем сестер по возрастанию количества ссор с братьями. Пусть первая сестра час назад была в ссоре с a_1 братьями, вторая – с a_2 братьями, …, m-я – с a_m братьями, причем

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_m \le n. \qquad (1)$$

Поскольку после примирения каждая сестра оставалась в ссоре с одинаковым количеством братьев, то

$$1 \le a_1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует утверждение 1°.

2°. $k < m$.

Доказательство. Поскольку $a_i < n$ для всех $i < m$, то

$$nk = \sum_{i=1}^{m} a_i < nm,$$

откуда следует утверждение 2°.

3°. $k \ge n - 1$.

Доказательство. Пронумеруем братьев по возрастанию количества ссор после примирения. Пусть первый брат после примирения остался в ссоре с b_1 сестрами, второй брат – с b_2 сестрами, …, n-й брат – с b_n сестрами, причем

$$0 \le b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_n \le k.$$

Сначала получим оценку для суммы $\sum_{i=1}^{n} b_i$ сверху, для чего выпишем цепочку неравенств

$$\begin{cases} b_n \le k, \\ b_{n-1} \le k - 1, \\ \ldots \\ b_1 \le k - (n-1); \end{cases}$$

отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \le kn - \frac{n(n-1)}{2}. \qquad (3)$$

Аналогично получим оценку для суммы $\sum_{i=1}^{n} b_i$ снизу, для чего выпишем цепочку неравенств

$$\begin{cases} 0 \le b_1, \\ 1 \le b_2, \\ \ldots \\ n-1 \le b_n; \end{cases}$$

отсюда

$$\frac{(n-1)n}{2} \le \sum_{i=1}^{n} b_i. \qquad (4)$$

Объединяя неравенства (3) и (4), получаем

$$\frac{(n-1)n}{2} \le kn - \frac{n(n-1)}{2},$$

откуда получаем утверждение 3°.

Результаты 1°, 2°, 3° запишем в виде цепочки

$$n \ge m > k \ge n - 1,$$

откуда следует $n = m$, $k = n - 1$.

Для дальнейшего решения нам понадобятся следующие утверждения.

4°. $k \le \dfrac{n+1}{2}$.

Доказательство. Просуммировав цепочку неравенств

$$\begin{cases} a_m \le n, \\ a_{m-1} \le n - 1, \\ \ldots \\ a_1 \le n - (m-1), \end{cases}$$

находим $nk = \sum_{i=1}^{m} a_i \le nm - \dfrac{m(m-1)}{2}$.

С учетом того, что $n = m$, отсюда и получаем утверждение 4°.

5°. $k \ge \dfrac{n+1}{2}$.

---

[1] *Решение задачи M1775 будет опубликовано позже.*