ных, поверхностей, то этот вопрос долгое время оставался нерешенным. Пусть произвольная замкнутая выпуклая поверхность выполнена из тонкого, гибкого, но нерастяжимого материала. Можно ли, сохраняя выпуклость, получить из нее поверхность другой геометрической формы? Если исходная поверхность выпуклый многогранник, то нельзя — по теореме Оловянишникова о единственности.

Окончательное обобщение теоремы Коши на случай произвольных поверхностей было получено в 1949 году представителем школы Александрова, академиком А.В.Погореловым. Он доказал, что любая замкнутая выпуклая поверхность неизгибаема при условии ее выпуклости. Теорема Погорелова о единственности, как и теорема Александрова о необходимых и достаточных условиях развертки выпуклого многогранника, принадлежит к числу выдающихся достижений в области геометрии.

Теорема Александрова о развертке

Итак, мы подошли к теореме Александрова о развертках выпуклых многогранников. Нам понадобится *эйлерова характеристика развертки*, которая определяется аналогично эйлеровой характеристике многогранника:

$$\chi = B - P + \Gamma,$$

где Γ – число многоугольников, входящих в развертку, P – число сторон многоугольников, при этом отождествляемые стороны считаются за одну, B – число вершин, при этом отождествляемые вершины считаются за одну.

В случае специальной развертки, когда каждый многоугольник развертки – это грань многогранника, ребро развертки – это ребро многогранника, а вершина развертки – вершина многогранника, очевидно, что эйлерова характеристика развертки равна эйлеровой характеристике многогранника.

Но нетрудно показать, что эйлерова характеристика сохраняется при перекраивании данной развертки в изометричную, так что эйлерова характеристика любой развертки многогранника равна характеристике многогранника. Поэтому *у развертки выпуклого многогранника эйлерова характеристика равна 2*.

Подсчитаем эйлерову характеристику для нескольких разверток куба. Для крестообразной развертки (см. рис.9,*в*) имеем $B = 8$, $P = 7$, $\Gamma = 1$ и, соответственно, $\chi = 2$. Для развертки, изображенной на рисунке 9,*д*, имеем $B = 11$, $P = 10$, $\Gamma = 1$, откуда опять $\chi = 2$.

Далее, если вершине развертки соответствует настоящая вершина многогранника, то сумма подходящих углов строго меньше 2π. Если же вершине развертки соответствует какая-нибудь точка внутри грани или ребра, то сумма подходящих к вершине углов равна 2π. Поэтому в развертке выпуклого многогранника сумма углов, подходящих к каждой ее вершине, *не превышает* 2π.

Итак, у всякой развертки выпуклого многогранника эйлерова характеристика равна двум, а сумма углов, подходящих к каждой вершине, не превосходит 2π. Удивительно то, что эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными.

Теорема о развертке (А.Д.Александров). *Из всякой развертки, удовлетворяющей условиям:*

(1) ее эйлерова характеристика равна 2;

(2) сумма углов, подходящих к любой вершине развертки, не превосходит 2π,

можно склеить выпуклый многогранник.

Отметим, что среди этих многогранников могут встретиться и многогранники, которые вырождаются в плоский многоугольник. Возьмем развертку, состоящую из двух равных выпуклых многоугольников, у которых соответственные стороны и вершины попарно отождествлены (рис.10). Эйлерова характеристика такой развертки $B - P + \Gamma = n - n + 2 = 2$, где n – число сторон у склеиваемых многоугольников. Эта развертка удовлетворяет и условию (2). По теореме Александрова, из нее можно склеить многогранник. Это – вырожденный многогранник, или иначе «двойной многоугольник». Его можно представить как контурный многоугольник, обклеенный с обеих сторон плоскими многоугольниками.

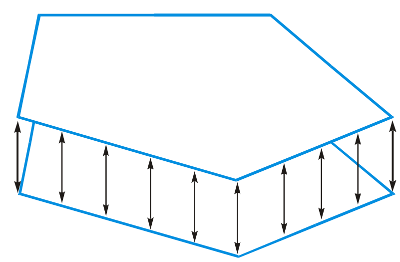

Рис.10

В отличие от теоремы Коши теорема Александрова не является интуитивно очевидной. Рассмотрим два примера.

«Тетраэдрический» пакет. В недавнем прошлом молоко разливалось в пакеты, которые имели форму не кирпича, как сейчас, а правильного тетраэдра. Хотя упаковывать в тару эти тетраэдры неудобно, зато изготавливать их легко. Сначала прямоугольная лента склеивается в цилиндр, горизонтальные края которого затем заклеиваются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис.11). Развертка такого тетраэдра – это прямоугольник, стороны которого разбиваются на мень-

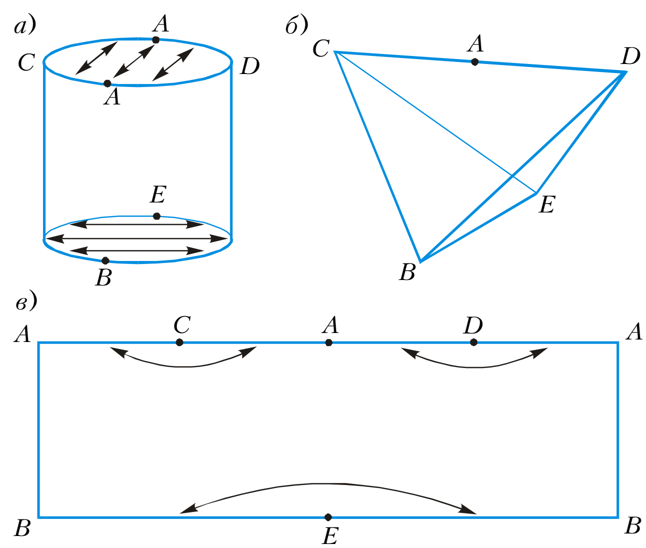

Рис.11