значно определяют форму треугольных граней. Поэтому, если многогранник выпуклый, то, по теореме Коши, длины ребер однозначно определяют форму многогранника, а следовательно, и его объем. Сама же зависимость величины объема от длин ребер была неизвестна. Факт существования изгибаемых многогранников указывает на то, что длины ребер форму многогранника, вообще говоря, не задают.

Теорема Сабитова устанавливает связь между длинами ребер многогранника (с треугольными гранями) и его объемом. Пусть дан многогранник, тогда можно построить специальный многочлен

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ которого выражаются при помощи четырех арифметических действий через длины ребер $l_1, \ldots, l_p$ многогранника. Заметим, что то, как коэффициенты многочлена выражаются через длины ребер, зависит собственно не от длин ребер и величин углов многогранника, а от его комбинаторного типа, т.е. от того, сколько ребер у граней, сколько граней у многогранника, как грани сходятся в вершинах и т.п. Подставляя теперь в коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ вместо $l_1, \ldots, l_p$ численные значения длин ребер данного многогранника, получим многочлен $F(x)$ с конкретными числовыми коэффициентами. Теорема Сабитова утверждает, что *объем данного многогранника есть один из корней этого многочлена.*

То, что все грани треугольники, особого значения не имеет, так как любую нетреугольную грань можно разбить при помощи диагоналей на треугольники. Введенные диагонали считаются хотя и искусственными, но ребрами нового многогранника, у которого все грани суть треугольники. Рассмотрим, например, два многогранника на рисунках 1,*а* и 1,*б*. Они устроены из попарно равных граней, взятых в одном и том же порядке. После разбиения каждой четырехугольной грани диагональю, по теореме Сабитова, для них обоих существует одинаковый многочлен, один из корней которого равен объему одного из многогранников, а некоторый другой корень – объему другого.

Теперь можно объяснить, почему в силу этой теоремы гипотеза о кузнечных мехах имеет положительный ответ: флексоры при изгибании сохраняют объем. Итак, мы рассматриваем многогранник только с треугольными гранями. Далее, при изгибании тип флексора не меняется, грани сохраняются, а длины ребер остаются постоянными. Поэтому существует многочлен F с заданными коэффициентами такой, что объем флексора есть один из корней этого многочлена. Если бы объем флексора при изгибании менялся, то это должно было бы происходить непрерывно. А так как объем является корнем многочлена F, то это должен быть один и тот же корень. Таким образом, объем многогранника должен оставаться неизменным.

Обобщение теоремы Коши

Часто под разверткой многогранника подразумевают совокупность многоугольников, которые склеиваются между собой по целым сторонам, образуя многогранник. Каждый многоугольник при этом превращается в грань многогранника, а сторона многоугольника – в ребро.

Например, совокупность из 6 квадратов, у которых склеиваемые стороны и вершины отмечены одинаковыми буквами (рис.9,*б*), образуют такую особую развертку куба (рис.9,*а*). Каждый ее многоугольник – это грань многогранника. А каждая сторона многоугольника (вместе с еще одной стороной другого многоугольника) – это ребро многогранника. Вершины развертки, помеченные одной буквой, склеиваются в одну вершину многогранника.

Другая, хорошо известная развертка куба (рис.9,*в*) – крестообразная; она состоит из одного лишь многоугольника с 14 вершинами и таким же количеством сторон. Помеченные одинаковыми буквами вершины и стороны склеиваются между собой. На этой развертке куба его грани уже не представлены в виде отдельных многоугольников. Не представлены на этой развертке также и некоторые будущие ребра куба.

Познакомимся еще с одной разверткой того же куба. Для этого, напротив, вместо того чтобы склеивать квадратные грани между собой, разрежем каждую из них на четыре треугольника. Получим новую развертку куба, состоящую из 24 треугольников (рис.9,*г*). Каждый треугольник – это лишь часть грани куба. В этой развертке мы сталкиваемся с новым для нас обстоятельством: *не все* стороны развертки являются ребрами многогранника, *не все* вершины развертки являются вершинами многогранника, *каждый* треугольник развертки является лишь частью грани склеиваемого из нее куба.

Эти 24 треугольника можно склеить другим образом (опять-таки вдоль отождествляемых сторон) в один многоугольник (рис.9,*д*). В этой развертке, состоящей из единственного многоугольника, *ни одна* из сторон не является ребром куба, который получается из этой развертки.

Теперь дадим определение развертки.

Пусть имеется, вообще говоря, несколько многоугольников, у которых каждая сторона отождествлена с одной и только одной стороной того же или другого многоугольника этой совокупности. Это отождествление (или склеивание) сторон должно удовлетворять еще двум условиям:

1) отождествляемые стороны имеют одинаковую длину;

2) от каждого многоугольника к любому другому можно перейти, проходя по многоугольникам, имеющим отождествленные стороны.

Совокупность многоугольников, удовлетворяющая условиям 1) и 2), называется *разверткой*.

Как мы уже видели, многоугольники развертки, их стороны и вершины не обязаны быть гранями, ребрами и вершинами многогранников, которые из них получаются.

А.Д.Александров доказал, что *два выпуклых многогранника с одинаковой разверткой конгруэнтны.* Эта теорема сильнее теоремы Коши. Действительно, если