# Вихрь в тумане

А. СТАСЕНКО

*Также нельзя привести простой и единой причины*
*...Почему луна в один месяц проходит*
*Тем же путем круговым, что солнце в год пробегает.*
*...Можно, во-первых, считать, что все это так происходит,*
*Как полагает о том Демокрита священное мненье.*
*То есть, чем ближе к земле проходят светила, тем меньше*
*Могут они увлекаться вращеньем небесного вихря,*
*Ибо стремленье его и напор, постепенно слабея*
*Книзу, становятся меньше...*

Тит Лукреций Кар. О природе вещей

Конечно, с точки зрения современной астрономии рассуждения Лукреция о «небесном вихре» представляются наивными. Но в них содержится «священное мненье»: с ростом расстояния от Земли (а ведь она – «центр Мира») растет и линейная (окружная) скорость – как, например, в случае вращения твердого цилиндра.

Нас будет интересовать возможность использования вращения для разделения веществ. Но... начнем издалека.

Каждый знает, как в ведре речной воды разделить воду, песок и пузырьки: просто надо подождать некоторое время – песчинки осядут на дно, пузырьки всплывут и лопнут над поверхностью, и останется чистая вода. В случае прозрачного сосуда видно, что частицы песка движутся с постоянной скоростью. Это означает, что сумма сил тяжести, архимедовой и сопротивления движению равна нулю.

Правда, это равновесие наступает не сразу. Например, если уронить стальной шарик в банку с водой, или с глицерином, или с медом, то некоторое время скорость его движения будет изменяться, пока не станет постоянной. Это «некоторое время» называется *временем релаксации* $\tau$. Говорят, что по истечении времени, значительно превышающего $\tau$,

$$m\frac{d\vec v}{dt} \to 0$$

(здесь $m$ – масса частицы, $v$ – ее скорость).

Можно убедиться, что время $\tau$ будет различным для упомянутых жидкостей, а также и для шариков разного размера в одной и той же жидкости. Если шарик маленький, а жидкость достаточно вязкая, можно считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости движения шарика, так что

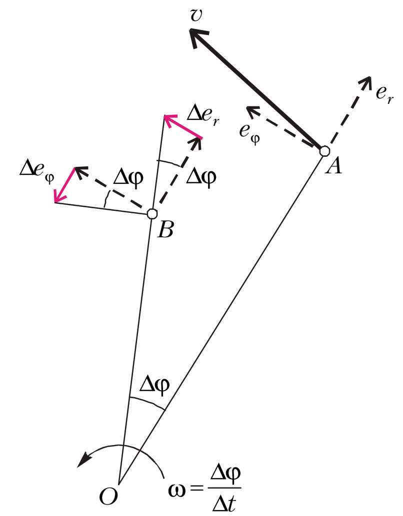
$$\frac{\vec F_{\text{сопр}}}{m} = -\beta\,\vec v_{\text{отн}}$$

(тут $\beta$ – коэффициент, который зависит от свойств жидкости и размера шарика). Такие движения называют ползущими, а соответствующую силу – силой Стокса. В этом соотношении подчеркнуто, что имеется в виду скорость шарика относительно жидкости, которая сама тоже может двигаться с некоторой скоростью $\vec V$:

$$\vec v_{\text{отн}} = \vec v - \vec V .$$

А что происходит в тумане? Там капельки воды висят в воздухе довольно долго (иногда часами). Но ведь они падают в поле тяготения Земли (сила Архимеда в этом случае пренебрежимо мала: плотность воды на три порядка больше плотности воздуха). Нельзя ли ускорить разделение воздуха и капелек при помощи каких-либо других сил, например центробежной силы инерции? (Напомним, что о силах инерции имеет смысл говорить только в случае неинерциальных систем отсчета.) Эта сила успешно используется, скажем, при разделении масла и простокваши в центрифугах, где исходный продукт – молоко – приводится в быстрое вращение. Конечно, мы не собираемся вращать весь утренний туман над рекой или аэродромом. Такое вращение иногда возникает самостоятельно, например в вихрях, стекающих с крыла самолета при вираже, – их можно наблюдать на Аэрошоу. А можно специально закрутить поток, чтобы избавиться от сконденсировавшейся воды – например, чтобы предварительно осушить рабочий воздух в аэродинамических трубах (эта конденсация часто мешает проведению экспериментов). Или чтобы при помощи центробежной сепарации избавиться от микробов, содержащихся в воздухе.

Итак, рассмотрим силы, возникающие при движении частицы (капельки, пылинки) во вращающейся системе координат (см. рисунок). Тут надо поднапрячься и поработать.




Пусть капелька в некоторый момент времени находится в точке $A$ с радиусом-вектором $\vec{OA}$ относительно центра вращения $O$. Представим ее скорость $\vec v$ в виде проекций на систему единичных векторов, т.е. ортов, $\vec e_r$ (радиальный) и $\vec e_\varphi$ (тангенциальный):

$$\vec v = v_r\cdot\vec e_r + v_\varphi\cdot\vec e_\varphi .$$

Через некоторый отрезок времени $\Delta t$ капелька окажется в точке $B$ с другим радиусом-вектором $\vec{OB}$. Самое интересное здесь то, что орты $\vec e_r$, $\vec e_\varphi$ тоже изменятся – конечно, не по величине, поскольку это единичные вектора, а по направлению. Если время $\Delta t$ мало́, угол поворота $\Delta\varphi$ радиуса-вектора капельки тоже мал (на рисунке для наглядности он изображен большим), и орты приобретут малые приращения $\Delta\vec e_r$ и $\Delta\vec e_\varphi$. Интересно сразу отметить, что $\Delta\vec e_r$ направлено вдоль $\vec e_\varphi$, а $\Delta\vec e_\varphi$ – против $\vec e_r$. Эти приращения легко найти из треугольников с малым углом $\Delta\varphi$ при вершине $B$:

$$\Delta e_r = e_r\cdot 2\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2},\ \Delta\vec e_r = \Delta\varphi\cdot\vec e_\varphi ,$$

$$\Delta e_\varphi = e_\varphi\cdot 2\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2},\ \Delta\vec e_\varphi = -\Delta\varphi\cdot\vec e_r .$$

Сейчас нам это понадобится, чтобы найти малое изменение скорости капельки:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\left(v_r \cdot \vec{e}_r + v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi\right) =$$

$$= \Delta\left(v_r \cdot \vec{e}_r\right) + \Delta\left(v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi\right) =$$

$$= \vec{e}_r \cdot \Delta v_r + v_r \cdot \Delta\vec{e}_r + \vec{e}_\varphi \cdot \Delta v_\varphi + v_\varphi \cdot \Delta\vec{e}_\varphi =$$

$$= \vec{e}_r \cdot \Delta v_r + v_r \Delta\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi \cdot \Delta v_\varphi - v_\varphi \Delta\varphi \cdot \vec{e}_r.$$

Мы уже подставили сюда выражения для $\Delta\vec{e}_r$ и $\Delta\vec{e}_\varphi$. А теперь, чтобы получить вектор ускорения, разделим все на $\Delta t$ и сгруппируем слагаемые при единичных векторах $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{e}_r\left(\frac{\Delta v_r}{\Delta t} - v_\varphi\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) +$$

$$+ \vec{e}_\varphi\left(\frac{\Delta v_\varphi}{\Delta t} + v_r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right).$$

Ясно, что в скобках получились проекции ускорения капельки в принятой нами вращающейся системе координат. Посмотрим на них внимательнее. Что такое $\Delta\varphi/\Delta t$? Это же угловая скорость $v_\varphi/r$! Использовав этот замечательный факт и приравняв радиальную и тангенциальную составляющие ускорения капельки соответствующим составляющим силы сопротивления, деленным на массу, получим

$$\frac{\Delta v_r}{\Delta t} = \frac{v_\varphi^2}{r} - \beta\left(v_r - 0\right),$$

$$\frac{\Delta v_\varphi}{\Delta t} = -\frac{v_r v_\varphi}{r} - \beta\left(v_\varphi - V_\varphi\right).$$

Тут в первом слагаемом правой части первого уравнения легко узнать центробежное ускорение, а коэффициент $\beta$ во втором слагаемом можно представить в виде $\beta = 1/\tau$ (хотя бы из соображений размерностей). Кроме того, мы рассматриваем случай, когда радиальная составляющая скорости несущего газа равна нулю, а тангенциальная составляющая $V_\varphi(r)$ – есть произвольная функция радиуса. Такое движение можно, например, осуществить в цилиндрической трубе. А теперь, считая, что капелька очень мала и, значит, быстро «привыкает» к локальным условиям обтекания ее несущей средой, приравняем нулю левые части этих уравнений, т.е. будем рассматривать безынерционное, ползущее движение капельки, аналогичное движению шарика в глицерине. Тогда получим алгебраическую систему уравнений для определения локально установившихся составляющих скорости капельки во вращающейся системе координат:

$$\frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{v_r}{\tau} = 0, \quad \frac{v_\varphi - V_\varphi}{\tau} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = 0.$$

Чтобы не возиться с точным решением этой системы уравнений, используем физические соображения. Интуитивно ясно, что очень малые частицы будут двигаться по окружности почти с той же скоростью, что и несущая среда: $v_\varphi \approx V_\varphi$. Это значит, что частица должна сделать много оборотов вокруг оси при незначительном смещении по радиусу, т.е. $v_r \ll v_\varphi \approx V_\varphi$. Принимая значение $v_\varphi = V_\varphi$ в качестве первого приближения, из первого уравнения получим

$$v_r = \frac{\tau}{r}V_\varphi^2.$$

В частном случае $V_\varphi = \omega_0 r$ (несущая среда вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0$ как твердое тело) найдем

$$v_r = \omega_0^2 r\tau.$$

Учитывая, что $v_r = \Delta r/\Delta t$, решим полученное уравнение (с начальным условием $r = r_0$ при $t = 0$) на «большом» времени ($t \gg \tau$):

$$r = r_0 e^{\omega_0^2\tau t} = r_0 e^{\omega_0\tau\varphi} = r_0 e^{2\pi\frac{\tau}{T}\varphi},$$

где $\varphi = \omega_0 t$, $\omega_0 = 2\pi/T$, $T$ — период (хотите — верьте, хотите — проверьте подстановкой). Таким образом, в принятых предположениях частица движется по так называемой логарифмической спирали. (Один Студент, забыв слово «спираль», назвал ее «окружностью переменного радиуса».)

Для тех, кто хочет провести вычисления, разумеется, важно знать, что такое $\tau$. Сила сопротивления для шаровой частицы (сила Стокса) равна

$$F_{\text{сопр}} = 6\pi\eta a(v - V),$$

где $a$ – радиус шарика, а $\eta$ – вязкость, которую можно найти в справочниках (не забудьте обратить внимание на систему единиц). Тогда

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2}{9}\frac{\rho a^2}{\eta},$$

где $\rho$ – плотность материала частицы. Например, для случая капельки воды ($\rho = 10^3$ кг/м$^3$) радиусом $a = 1$ мкм $= 10^{-6}$ м в воздухе ($\eta \approx 2\cdot 10^{-5}$ кг/(м·с)) получим

$$\tau \sim 10^{-5}\ \text{с}.$$

Сравним это время, например, со временем одного оборота при закрутке воздуха с такими капельками в трубке радиусом $r_0 = 1$ см с линейной скоростью $V_\varphi = 100$ м/с. Время одного оборота равно

$$T = \frac{2\pi r_0}{V_\varphi} = 2\pi\cdot 10^{-4}\ \text{с},$$

что в шестьдесят раз больше $\tau$, так что наши предположения о квазиравновесном движении капельки верны. Отметим, что при этих условиях капелька имеет чудовищное центробежное ускорение:

$$V_\varphi^2/r_0 \sim 10^6\ \text{м/с}^2 = 10^5 g\,!$$

Итак, вращайте воздух в кондиционерах – и вы избавитесь от пыли, капель и микробов.

*Вниманию наших читателей!*

**Только на второе полугодие 2001 года, в порядке исключения, подписка на журнал «Квант» (и Приложения к нему) по странам СНГ проводится в редакции.**

**Адрес редакции: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64 – А**

**Телефоны редакции: 930–56–48, 930–56–41**