ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №4)

1. Из условия задачи следует, что стоимость всей покупки в центах должна делиться на 3. Но 2000 на три не делится, следовательно, дядюшка Скрудж должен получить сдачу.

2. В каждой из четырех отмеченных вершин куба (рис.1) должно сходиться по 3 разноцветных ребра, так что ребер

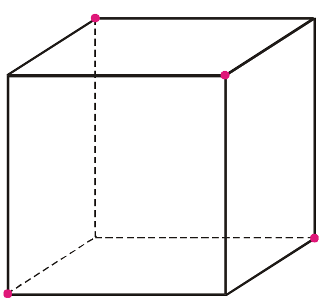

Рис. 1

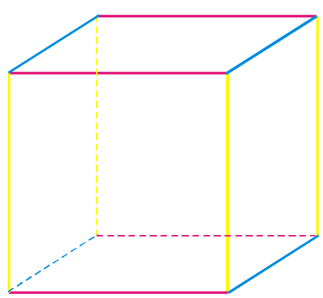

Рис. 2

каждого цвета должно быть не менее четырех. Но и не более четырех, поскольку у куба всего 12 ребер. Одна из возможных раскрасок показана на рисунке 2 (параллельные ребра окрашены одним цветом).

3. Удовлетворяющие условию задачи девять последовательных чисел будем искать среди чисел вида $\overline{ab(c-4)}$, $\overline{ab(c-3)}$, $\overline{ab(c-2)}$, $\overline{ab(c-1)}$, $\overline{abc}$, $\overline{ab(c+1)}$, $\overline{ab(c+2)}$, $\overline{ab(c+3)}$, $\overline{ab(c+4)}$, где a, b, c – некоторые ненулевые цифры. Сумма произведений цифр этих чисел равна

$$ab\big((c-4)+(c-3)+(c-2)+(c-1)+$$
$$+c+(c+1)+(c+2)+(c+3)+(c+4)\big)=9abc.$$

Приравняв ее к числу $1125=9\cdot 5^3$, находим $a=b=c=5$.

Итак, условию задачи удовлетворяют девять последовательных чисел: 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559.

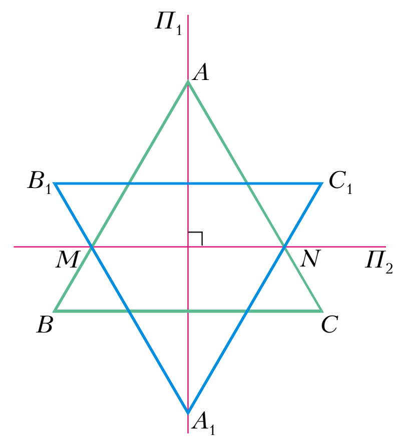

Рис. 3

4. На рисунке 3 показаны два равных правильных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, а также прямые $П_1$ и $П_2$, обладающие требуемыми свойствами. Треугольник $A_1B_1C_1$ симметричен треугольнику ABC относительно прямой $П_2$. Прямая $П_2$ пересекает стороны треугольника ABC в точках M и N таких, что $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{3}{4}$. Прямая $П_1$ проходит через вершину A перпендикулярно прямой $П_2$.

5. Равенства в первой пирамиде представляют собой частный случай тождества

$$n^2+(n^2+1)+(n^2+2)+\ldots+(n^2+n)=$$
$$=(n^2+n+1)+(n^2+n+2)+\ldots+(n^2+2n),$$

а равенства во второй пирамиде – частный случай тождества

$$\big((1+2n)n\big)^2+\big((1+2n)n+1\big)^2+\ldots+\big((1+2n)n+n\big)^2=$$
$$=\big((1+2n)n+n+1\big)^2+\big((1+2n)n+n+2\big)^2+\ldots+\big((1+2n)n+2n\big)^2,$$

где n – натуральное.

Справедливость этих тождеств проверьте самостоятельно.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. От гладкой поверхности воды свет фар отражается зеркально, т.е. вперед, а от шероховатой дороги – рассеянно,

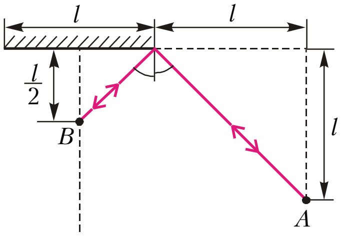

Рис. 4

так что часть отраженного света попадает в глаза водителю.

2. Нет, нельзя. Отражение от экрана должно быть рассеянным – иначе зрители не увидят изображения.

3. На расстоянии $l/2$ от зеркала (рис.4).

4. Если на зеркало падает сходящийся пучок лучей.

5. Можно. Например, свет, идущий от фонарика (рис.5), отразится зеркалом, попадет на предмет A, и его изображение A' в зеркале станет также более освещенным.

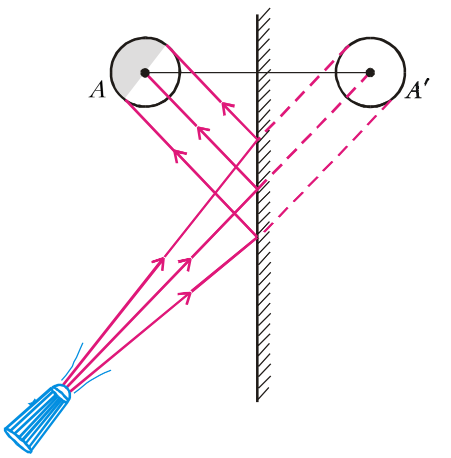

Рис. 5

6. Ошибся художник, сделавший рисунок а). Подводная часть палки должна казаться нам приподнятой из-за преломления на границе вода—воздух.

7. Лучи останутся параллельными.

8. Нет, так как показатель преломления у воды меньше, чем у стекла.

9. Нет, не может.

10. Вследствие капиллярных эффектов вода поднимается по карандашу, и ее поверхность вблизи него искривляется. Лучи света преломляются на искривленной поверхности воды так, что на тени карандаша появляется светлый промежуток.

11. Из-за копоти поверхность монеты покрыта слоем воздуха, на границе которого с водой происходит полное отражение освещающего монету света.

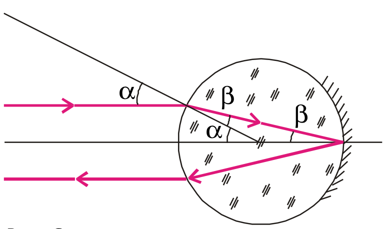

Рис. 6

12. $n = 2$ (так как $\alpha = 2\beta$; рис.6).

13. Изображение лампы получается при отражении лучей света от задней (посеребренной) и от передней грани стекла. Кроме того, многократное отражение от обеих граней лучей, идущих внутри стекла, создает ряд дополнительных изображений.

14. Изображение свечи приблизится к зеркалу.

15. При прохождении через толченое стекло свет пересекает множество границ раздела стекло—воздух, на каждой из которых происходит не только преломление, но и отражение. Из-за этого свет практически не проходит сквозь толченое стекло, и оно выглядит белым. В воде, показатель преломления которой близок к показателю преломления стекла, отражение на границах раздела, а также отклонение лучей при преломлении резко уменьшаются, поэтому в воде толченое стекло почти прозрачно.

Микроопыт

Закрытый глаз вновь не будет виден. Причина – в обратимости световых лучей: падающий и отраженный лучи меняются местами.

Корпускулярные и волновые свойства света

1. $n = \dfrac{e\lambda W}{chI_н} \approx 100$.

2. $\Delta\lambda = \dfrac{h}{2m_pc} \approx 6{,}6\cdot10^{-16}$ м (здесь $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг – масса протона).

3. $m = \dfrac{2H\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{\lambda} \approx 360$; $\Delta x = \dfrac{\lambda L\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{H\sin\varphi\cos^2\varphi} \approx 2{,}8$ см; $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda}{m} \approx 1{,}6$ нм.

Иррациональные уравнения

1. а) $\varnothing$; б) -2; 1; в) $4+2\sqrt{7}$; г) $\varnothing$; д) 3; е) $-1/2$; $3/2$; ж) -1; з) $1/2$.

2. а) $99/49$; 3; б) $\left(5\pm2\sqrt{2}\right)/2$; в) $1\pm\sqrt{3}$. *Указание.* Сделайте замену $u = \sqrt{2x^2-4x+12}$; г) 12; д) 4; е) $\left(-1\pm\sqrt{17}\right)/2$; ж) $-1/\sqrt{2}$; $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/4$. *Указание*. Возведите в квадрат, а затем выполните замену $t = 2x\sqrt{1-x^2}$; з) $\left(1+\sqrt{37}\right)/2$.

3. а) $11-a+4\sqrt{7-2a}$ при $a < 1{,}5$; $11-a\pm4\sqrt{7-2a}$ при $1{,}5 \le a \le 3{,}5$; $\varnothing$ при $a > 3{,}5$; б) $\varnothing$ при $a < \left(1+\sqrt{17}\right)/4$; $\left(17+\sqrt{17}\right)/4$ при $a = \left(1+\sqrt{17}\right)/4$;
$3a^2-a-1\pm2a\sqrt{2a^2-a-2}$ при $\left(1+\sqrt{17}\right)/4 < a \le 2$;
$3a^2-a-1+2a\sqrt{2a^2-a-2}$ при $a > 2$; в) $12-2a+4\sqrt{8-3a}$ при $a < 4/3$; $12-2a\pm4\sqrt{8-3a}$ при $4/3 \le a < 8/3$; $20/3$ при $a = 8/3$; $\varnothing$ при $a > 8/3$; г) $\varnothing$ при $a < -3/8$ и $0 < a < 3/8$; $12a^2-2a+4a\sqrt{8a^2-3a}$ при $-3/8 \le a \le 0$ и $a > 4/3$; $12a^2-2a\pm4a\sqrt{8a^2-3a}$ при $3/8 < a \le 4/3$; $15/16$ при $a = 3/8$.

4. а) $-3/4$; б) $3/4$; $\left(7-\sqrt{13}\right)/6$; в) $\left(5-3\sqrt{5}\right)/15$; г) 5; д) 1; е) 5.

5. а) 3; б) 1; в) 1; г) $\left(3+\sqrt{13}\right)/2$. *Указание*. При $x \ge 0$ уравнение равносильно такому:

$$x = \sqrt{3\sqrt{3x+1}+1},$$

а при $x < 0$ корней нет.

6. а) 2; б) 2. **7.** а) -1; б) 2.

XXVII Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап

9 класс

1. Эти суммы равны. *Указание.* Разбейте числа от n^2 до $(n+1)^2-1$ на две группы $A_n = \left\{n^2, n^2+1, \ldots, n^2+n\right\}$ и $B_n = \left\{n^2+n+1, n^2+n+2, \ldots, n^2+2n\right\}$. Для чисел группы A_n ближайшим квадратом является n^2, для B_n ближайшим является $(n+1)^2$ – квадрат другой четности. Докажите, что $S(B_n) = S(A_n)$.

2. Из условия следует, что $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)$, где $x_2-x_1 > 2$, и $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\left(x^2+Ax+B\right)$, так как $P(x_1) = Q(x_1) = 0$, $P(x_2) = Q(x_2) = 0$. Предположим, что

$P(x)-Q(x)\ge 0$, т.е. $(x-x_1)(x-x_2)(x^2+Ax+B-1)\ge 0$ при всех x. Это возможно только тогда, когда $x^2+Ax+(B-1)=(x-x_1)(x-x_2)$, т.е. при $A=-(x_1+x_2)$, $B-1=x_1x_2$. Поэтому дискриминант трехчлена x^2+Ax+B, равный $D=(x_1-x_2)^2-4$ положителен. Но тогда $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ (возможны совпадения корней x_3 и x_4 с x_1 или x_2, но при этом $x_3\ne x_4$), т.е. $P(x)$ не может быть отрицательным только в интервале $I=(x_1;x_2)$. Противоречие.

3. Пусть M – середина стороны CD, а L – середина стороны AD. Достроим параллелограмм $ABCD$ до треугольника BA_1C_1 так, чтобы отрезок AC был средней линией треугольника BA_1C_1 (рис.7). Для этого через точку D проведем прямую,

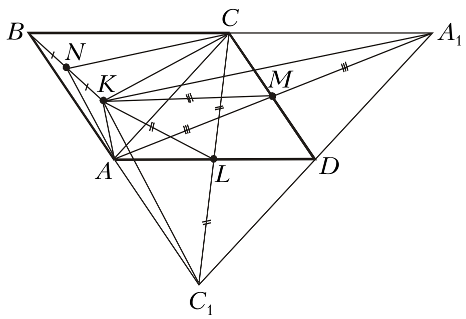

Рис. 7

параллельную AC, и обозначим через A_1 и C_1 точки пересечения этой прямой с продолжениями сторон BC и BA соответственно. Четырехугольники ACA_1D и CAC_1D – параллелограммы, а точки A, M и A_1 лежат на одной прямой. Следовательно, в треугольнике AKA_1 угол K – прямой, поскольку точка M равноудалена от точек A, A_1 и K. Аналогично доказывается, что $\angle CKC_1=90^\circ$. Таким образом,

$$\angle CKA_1=90^\circ-\angle A_1KC_1=\angle C_1KA.$$

Отрезки CN и KA_1 параллельны, ибо CN – средняя линия в треугольнике KBA_1. Аналогично параллельны отрезки AN и KC_1. Следовательно,

$$\angle NCK=\angle CKA_1=\angle C_1KA=\angle NAK.$$

4. Уберем вершину A_{2000} данного многоугольника $A_1A_2\ldots A_{2000}$. Назовем *средними* диагоналями многоугольника $A_1A_2\ldots A_{1999}$ отрезки, соединяющие вершины, номера которых отличаются на 999 или 1000. Рассмотрим все средние диагонали, их ровно 1999 штук, причем любые две из них пересекаются, а из каждой вершины выходят ровно две средние диагонали. Поскольку $1999>2\cdot 999$, то найдутся три одноцветные средние диагонали, они попарно пересекаются в трех разных точках. Эти точки пересечения и являются вершинами искомого треугольника.

5. 500 или 501.

Рассмотрим любые четыре подряд идущие монеты. Докажем, что среди них ровно одна трехкопеечная. Предположим противное. Если среди этих монет не оказалось ни одной трехкопеечной, то однокопеечные и двухкопеечные монеты чередуются, что невозможно. Двух трехкопеечных монет тоже не может быть, поскольку между ними должно быть хотя бы три монеты. Таким образом, среди первых 2000 монет ровно 500 трехкопеечных. Следовательно, всего трехкопеечных монет может быть 501 или 500. Оба ответа возможны, например,

3121312131213…31213 и 2131213121312…21312.

7. Пусть P и Q – середины сторон AB и BC соответственно, P_1, K_1, Q_1, M_1 – проекции точек P, K, Q, M на сторону AC (рис.8). Тогда $P_1Q_1=\frac{1}{2}AC$ и, по условию, $K_1M_1=\frac{1}{2}AC$, поэтому $P_1Q_1=K_1M_1$,

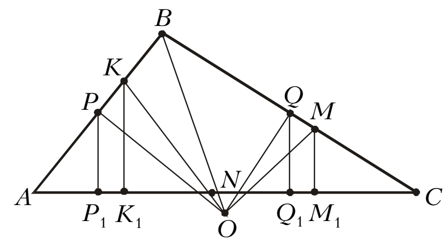

Рис. 8

следовательно, если точка K ближе к вершине B, чем точка P, то точка Q ближе к B, чем точка M. Из условия следует, что $OP\perp AB$, $OQ\perp BC\Rightarrow\angle POQ=\pi-\angle B$. Поэтому утверждение задачи равносильно равенству $\angle KOM=\angle POQ$, т.е., с учетом установленного расположения точек, подобию прямоугольных треугольников OPK и OQM.

Пусть $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\gamma$. Тогда $PK=P_1K_1:\cos\alpha$, $QM=Q_1M_1:\cos\gamma$. Но $P_1Q_1=K_1M_1\Rightarrow P_1K_1=Q_1M_1$, и $PK:QM=\cos\gamma:\cos\alpha$.

С другой стороны, $\angle AOB=2\gamma\Rightarrow\angle BOP=\gamma\Rightarrow OP=R\cos\gamma$, где R – радиус описанной окружности. Аналогично, $OQ=R\cos\alpha\Rightarrow OP:OQ=\cos\gamma:\cos\alpha=PK:QM$ и, значит, $\Delta OPK\sim\Delta OQM$.

8. $n=p^m$, где p – простое число, $m\in\mathbf{N}$.

Предположим, что n не является степенью простого числа. Пусть p – наименьший простой делитель числа n. Представим n в виде $p^m\cdot k$, где $k\not\vdots\, p$. По условию число $l=p+k-1$ является делителем n. Покажем, что l взаимно просто с k. Предположим противное. Если $(l,k)>1$, то $(p-1,k)=(l-k,k)=(l,k)>1$. Таким образом, число k имеет какой-то делитель d, $2\le d\le p-1$. Противоречие с выбором числа p. Следовательно, $p+k-1=p^\alpha$. Ясно, что $\alpha\ge 2$, ибо $k>1$. Таким образом, числа p^2 и k – взаимно простые делители числа n, т.е. p^2+k-1 – делитель числа n. При этом p^2+k-1 взаимно просто с k, поскольку в противном случае k имеет общий делитель с $p^2-1=2(p-1)\cdot\frac{p+1}{2}$, что снова противоречит выбору числа p. Следовательно, $p^2+k-1=p^\beta$, где $\beta\ge 3$. Но тогда

$$p^\beta=p^2+k-1=p^2+(p+k-1)-p=p\left(p+p^{\alpha-1}-1\right)\not\vdots\, p^2.$$

Противоречие, следовательно, $k=1$. Нетрудно убедиться, что полученные числа удовлетворяют условию.

10 класс

3. Обозначим внешнюю окружность через Ω, внутреннюю – ω, описанную окружность треугольника BKM – ω_1, их радиусы – R, r и r_1 соответственно. Пусть отрезок BN пересекает ω в точке P (рис.9). Рассмотрим гомотетию H с центром в точке N, переводящую внутреннюю окружность во внешнюю. Тогда $H(P)=B$, $H(AB)=l$, где l – касательная к Ω, параллельная AB, т.е. проходящая через точку M. Следовательно, $H(K)=M$, т.е. точки N, K, M лежат на одной прямой. Тогда, по теореме синусов,

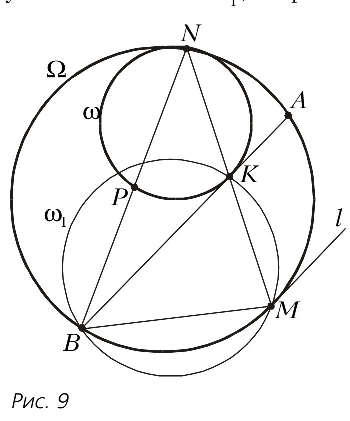

Рис. 9

$BK:BN=(2r_1\sin\alpha):(2R\sin\alpha)=r_1:R$, где $\alpha=\angle BMN$. Кроме того, $NP:BN=r:R$. Далее, $BK^2=BP\cdot BN$, поэтому

$\left(\frac{r_1}{R}\right)^2 = \left(\frac{BK}{BN}\right)^2 = \frac{BP}{BN} = 1 - \frac{NP}{BN} = 1 - \frac{r}{R}$. Отсюда следует, что отношение $\frac{r_1}{R}$ постоянно.

4. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам. В этом графе между любыми двумя вершинами есть единственный путь, следовательно, в нем нет циклов (такой граф называется *деревом*). По условию, в этом графе есть 100 вершин, из которых выходит ровно одно ребро (такие вершины называются *висячими*) – пусть это вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Для каждой пары висячих вершин A_i и A_j существует единственный путь между ними; назовем количество ребер на этом пути *расстоянием* между этими вершинами и будем обозначать через $d(A_i, A_j)$. Из конечности числа способов разбить эти 100 вершин на 50 пар следует, что при одном из способов достигается максимум суммы расстояний между вершинами в парах. Соединим пары вершин при этом разбиении 50 *новыми* ребрами (остальные ребра будем называть *старыми*). Мы докажем, что после этого даже при удалении любого ребра сохраняется *связность* графа (т.е., возможность из любой вершины попасть в любую другую).
Предположим противное: пусть при удалении ребра между вершинами B и C граф распался на две части, которые не связаны между собой. Нетрудно заметить, что удаленное ребро было старым, в одной из полученных частей находится вершина B, а в другой – вершина C. Очевидно, в каждой части должна быть вершина, из которой выходит ровно одно старое ребро, и каждое новое ребро соединяет две вершины из одной части. Но тогда в одной из частей должно быть новое ребро, соединяющее вершины A_i и A_j, а в другой – соединяющее вершины A_k и A_m. Однако в этом случае нетрудно проверить, что

$$d(A_i, A_j) + d(A_k, A_m) < d(A_i, A_k) + d(A_j, A_m),$$

что противоречит максимальности суммы расстояний в выбранных парах. Следовательно, при удалении ребра BC возможность попасть из любой вершины в любую другую должна сохраниться.

5. По условию, $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, следовательно, $P(Q(x)) = (Q(x) - x_1)(Q(x) - x_2)(Q(x) - x_3)$, где $Q(x) - x_i \neq 0$, i = 1, 2, 3. Пусть D_i (i = 1, 2, 3) – дискриминант трехчлена $Q(x) - x_i$. По условию, $D_i < 0$, т.е. $2001 - x_i > \frac{1}{4}$. Перемножив полученные неравенства, имеем

$$P(2001) = (2001 - x_1)(2001 - x_2)(2001 - x_3) > \frac{1}{64}.$$

7. Пусть окружность, проходящая через H, A_1, B_1, пересекает второй раз прямую CH в точке C_1'. Достаточно доказать, что C_1' совпадает с C_1.
Рассмотрим точку F, диаметрально противоположную точке H (рис.10). Углы HA_1F, HB_1F и $HC_1'F$ – прямые, так как опираются на диаметр. Поэтому $A_1F \| BC$, $B_1F \| AC$, $C_1'F \| AB$. Отсюда следует равенство площадей $S_{BFC} = S_{BA_1C}$ (в треугольниках BFC и BA_1C основание общее, а высоты равны), аналогично, $S_{CFA} = S_{CB_1A}$ и $S_{AFB} = S_{AC_1'B}$.

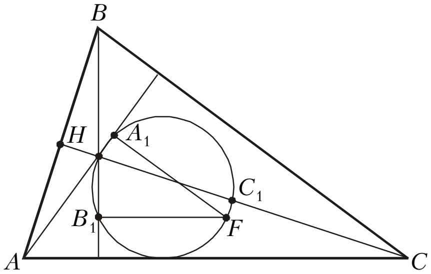

Рис. 10

Заметим, что точка F лежит внутри треугольника ABC: поскольку A_1 и B_1 лежат на высотах, а не на их продолжениях, точка F лежит внутри угла ACB; если бы при этом F лежала вне треугольника ABC, то сумма площадей $S_{AFC} + S_{BFC} = S_{AB_1C} + S_{BA_1C}$ была бы больше площади S треугольника ABC – противоречие с условием; таким образом, C_1' лежит на высоте, а не на ее продолжении. Ввиду равенств $S = S_{AFB} + S_{BFC} + S_{CFA} = S_{AC_1B} + S_{BA_1C} + S_{CB_1A}$ получаем, что $S_{AC_1'B} = S_{AC_1B}$, откуда следует совпадение точек C_1 и C_1'.

8. $n = p^3$, где p – простое, или n = 12.
Легко видеть, что указанные в ответе числа удовлетворяют условию задачи. Покажем, что других чисел, удовлетворяющих условию, не существует.
Случай нечетного n рассмотрен в решении задачи 8 для 9 класса. Пусть n четно и не является степенью двойки; представим его в виде $n = 2^m \cdot k$, где $m \geq 1$, а $k > 1$ – нечетное число. Заметим, что $k + 2 - 1 = k + 1$ – делитель n. Поскольку $(k+1, k) = 1$, то $k + 1 = 2^\alpha$, $\alpha > 1$. Поэтому $2^2 + k - 1 = k + 3$ – тоже делитель n. Заметим, что $k + 3 = (k+1) + 2 = 2^\alpha + 2$ не делится на 2^2. Кроме того, $(k + 3, k) = (3, k) \leq 3$. Из этого заключаем, что $k + 3 \leq 2 \cdot 3 = 6$, и $k \leq 3$. Значит, $n = 2^m \cdot 3$. Но m = 1 не подходит; $m \geq 3$ также не подходит, так как в этом случае мы получили бы, что $2^3 + 3 - 1 = 10$ также делитель n.

11 класс

1. 97 средних чисел.
Заметим, что если число $k = m$ является средним, то число $k = 100 - m$ также является средним. Поэтому если число k = 1 не является средним, то число k = 99 также не является средним и количество средних чисел не больше 97 ($k \neq 100$). Если же число k = 1 является средним, то вес одной из гирек равен S и, следовательно, только k = 99 также является средним числом. Значит, количество средних чисел не превосходит 97.
Приведем пример набора из 100 гирек с весами $a_1, \ldots, a_{100}$, для которого все числа от 2 до 98 (всего 97 чисел) – средние. Пусть $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, n = 1, 2, …, 97 – последовательные числа Фибоначчи и $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{98}$. Выберем $a_{100} = S - a_{99}$. Тогда суммарный вес всех гирек равен $2S$ и в то же время

$$a_{100} + a_{99} = a_{100} + a_{98} + a_{97} = a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{95} =$$
$$= a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{94} + a_{93} =$$
$$= a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{94} + a_{92} + a_{90} + \ldots + a_6 + a_4 + a_3 + a_2 = S.$$

Следовательно, средними являются числа 2, 3, 4, …, 51. Но тогда средними будут и числа 100 – 2 = 98, 100 – 3 = 97, … …, 100 – 48 = 52, т.е. все числа от 2 до 98 – средние.

3. Для каждой из прямых, пересекающих все многоугольники набора P_1, проведем параллельную ей прямую через центр O некоторой окружности S. Обозначим через S_1 множество точек пересечения этих прямых с S. Определим аналогично для набора P_2 множество $S_2 \subset S$.
Покажем, что $S_1 \cup S_2 = S$. Спроектируем многоугольники наборов P_1 и P_2 на произвольную прямую l. Из условия следует, что при этом получатся два набора отрезков P_1' и P_2' таких, что любые два отрезка из разных наборов имеют общую точку.
Возьмем отрезок I, левый конец A которого является среди полученных отрезков самым правым. Пусть, например, I принадлежит P_1', тогда все отрезки P_2' содержат точку A. Следо-

вательно, прямая m, проходящая через точку A перпендикулярно l, пересекает все многоугольники набора P_2. Значит, равенство $S_1 \cup S_2 = S$ доказано.

Очевидно, все отрезки в P_1' имеют общую точку и в P_2' имеют общую точку тогда и только тогда, когда точки окружности S, имеющие направление m, принадлежат как S_1, так и S_2.

Но если все отрезки из P_1' имеют общую точку и все отрезки из P_2' имеют общую точку, то любые два отрезка из $P_1' \cup P_2'$ имеют общую точку. Тогда все отрезки из $P_1' \cup P_2'$ имеют общую точку.

Следовательно, прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно l, пересекает все многоугольники наборов P_1 и P_2. Таким образом, утверждение задачи доказано, если $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$.

Покажем, что $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$. В самом деле, легко видеть, что множества S_1 и S_2 состоят из конечного числа замкнутых дуг окружности (например, если число элементов в P_1 не больше n, то дуг не больше $2C_n^2$, так как конец каждой дуги соответствует непересекающимся многоугольникам). Так как в каждом множестве есть пара непересекающихся многоугольников, то, отделяя эти многоугольники прямой, мы видим, что $S_1 \not\equiv S$ и $S_2 \not\equiv S$.

Если $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то $S_1 \cup S_2$ состоит из попарно непересекающихся замкнутых дуг. Возьмем конец одной дуги, тогда между ним и ближайшим концом дуги по часовой стрелке нет точек $S_1 \cup S_2$, что противоречит тому, что $S_1 \cup S_2 = S$.

4. При n участниках.

Докажем, что n участников могло быть. Пример очевиден – пусть каждый ответит только на один вопрос, причем разные участники – на разные вопросы.

Теперь докажем от противного, что не могло быть $n + 1$ участников или более. Представим себе, что мы клонировали каждого участника, т.е. у нас есть неограниченное количество участников каждого из $n + 1$ типов. Докажем, что если мы сможем составить из них две команды, разные по составу (хотя бы для одного типа число участников этого типа в первой команде не равно числу участников этого типа во второй команде), но имеющих одинаковые результаты (т.е. на каждый вопрос в первой команде ответило столько же человек, сколько во второй), то мы пришли к противоречию.

Во-первых, можно считать, что участники каждого типа присутствуют не более чем в одной команде: если в обеих командах есть по участнику одного типа – удалим их, составы команд останутся разными, а результаты будут одинаковыми.

Пусть, без ограничения общности, в первой команде участников не меньше, чем во второй. Тогда нельзя назначить баллы за вопросы так, чтобы места всех участников первой команды были выше, чем места участников второй команды, ибо сумма баллов участников первой команды всегда равна сумме баллов участников второй команды.

Осталось доказать, что такие две команды найдутся. Для этого запишем систему линейных уравнений, i-е уравнение которой гласит, что разность числа участников первой и второй команд, ответивших на i-й вопрос, есть ноль; j-й переменной здесь будет число участников j-го типа в команде (в первой, если переменная положительна, во второй – если отрицательна). Это система из n однородных уравнений с $n + 1$ переменной. Как известно, она имеет ненулевое решение, причем, поскольку все коэффициенты рациональны (а они нули или единицы), существует рациональное ненулевое решение. Так как уравнения однородны, решение можно домножить на константу. Домножим так, чтобы значения всех переменных стали целыми. Требуемые команды найдены.

5. Пусть графики трехчленов пересекаются в точке $P(x_0, y_0)$. Тогда

$$f(x) = y_0 + (x - x')(x - x_0);$$

$$g(x) = y_0 + (x - x'')(x - x_0),$$

поэтому

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) =$$

$$= (\alpha + \beta)y_0 + (x - x_0)((\alpha + \beta)x - (\alpha x' + \beta x'')) =$$

$$=(\alpha + \beta)y_0 + (\alpha + \beta)(x - x_0)^2 \geq (\alpha + \beta)y_0 > 0,$$

если выбрать α и β так, чтобы

$$(\alpha + \beta)x_0 = \alpha x' + \beta x'',$$

т.е. $\beta = \alpha \dfrac{x_0 - x'}{x'' - x_0}$. Это можно сделать, так как $x' < x_0 < x''$.

6. Пусть d – наибольший общий делитель чисел a и b, т.е. $a = da_1$, $b = db_1$, где a_1 и b_1 взаимно просты. Тогда $da_1b_1(a_1 + b_1)$ делится на $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 = m$. Число $a_1 + b_1$ взаимно просто с числами a_1 и b_1 (в противном случае a_1 и b_1 имеют общий делитель), поэтому из равенств $m = a_1(a_1 + b_1) + b_1^2 = b_1(a_1 + b_1) + a_1^2$ следует, что m взаимно просто с числами a_1, b_1 и $a_1 + b_1$, поэтому d делится на m. Но тогда $d \geq m > a_1b_1$, следовательно, $d^3 > ab$. Поэтому $|a - b| \geq d > \sqrt[3]{ab}$, что и требовалось доказать.

7. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам. В задаче требуется покрасить вершины этого графа в $2001 - k$ цветов так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром (такая раскраска называется *правильной*).

Рассмотрим вершину A наибольшей степени, пусть из этой вершины выходит s ребер. Обозначим через V множество из s вершин, соединенных с A, пусть W – множество из $2000 - s$ оставшихся вершин. Рассмотрим два случая.

1) В множестве W есть две соединенные ребром вершины B и C. Тогда рассмотрим множество U, состоящее из вершины A и всех вершин множества W, кроме C. В этом множестве $2000 - s$ вершин; любая не входящая в U вершина соединена ребром с одной из вершин множества U (либо с вершиной A, либо с B). Следовательно, $2000 - s \geq k$.

Остается заметить, что из каждой вершины выходит не более s ребер, следовательно, эти вершины можно по очереди покрасить в $s + 1$ цвет так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром (вершину нельзя красить в цвета ее соседей, которых не более чем s, а в нашем распоряжении $s + 1$ цвет). Неравенство $s + 1 = (2000 - s) \leq 2001 - k$ завершает доказательство в этом случае.

2) Никакие две вершины множества W не соединены ребром. Покрасим все эти вершины в цвет 1, в этот же цвет можно покрасить вершину A (она не соединена ребром ни с одной вершиной из W). Заметим, что в этом случае вершины из множества W должны быть соединены с вершинами из множества V (так как из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро). Это означает, что среди вершин множества V есть две, не соединенные ребром (иначе в этом множестве есть вершина, из которой выходит более s ребер к $s - 1$ остальным вершинам множества V, к вершине A и к вершинам множества W). Так как среди s вершин множества V есть две, не соединенные ребром, вершины этого множества можно покрасить в $s - 1$ цвет. Таким образом, все вершины оказались раскрашены в s цветов и никакие две вершины не соединены ребром. Так как все s вершин из множества V соединены ребром с вершиной A, то $2001 - s \geq k$, следовательно, $s = 2001 - (2001 - s) \leq 2001 - k$, что и требовалось доказать.

8. Пусть ω – сфера из условия задачи, ω_1 – сфера, описан-

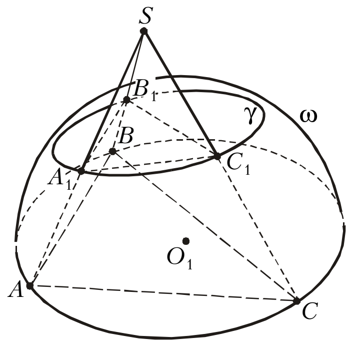

Рис. 11

ная около тетраэдра $SA_1B_1C_1$. Эти сферы пересекаются по окружности γ, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ (рис.11). Выберем на γ произвольно точку K_1, пусть K – точка пересечения луча SK_1 со сферой ω. Рассмотрим сечение сфер ω и ω_1 плоскостью $\alpha = SAK$. Пусть l – касательная к сечению сферы ω_1 плоскостью α, проведенная в точке S (рис.12). Тогда $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = \pi - \angle A_1K_1K = \angle 3$, следовательно $\angle 1 = \angle 3$ и, значит, $AK \| l$. Поэтому если β – плоскость, касающаяся ω_1 в точке S, то $AK \| \beta$. Поэтому лучи, проведенные из точки S и пересекающие окружность γ, вторично пересекают сферу ω в точках, лежащих в одной плоскости τ. Точки A, B и C лежат в этой плоскости, следовательно, τ проходит через точку O_1 – центр сферы ω.

Теперь рассмотрим множество плоскостей, касающихся ω в точках на окружности γ. Они касаются некоторого конуса с вершиной в точке O (и образующими OA_1, OB_1, OC_1). Проведем плоскость через точки O, O_1 и S. В сечении получатся две пересекающиеся окружности (рис.13), при этом

$$\angle SP_1P = \angle SQ_1Q = 90^\circ,$$

так как $O_1 \in PQ$. Но OP_1 и OQ_1 – касательные к окружнос-

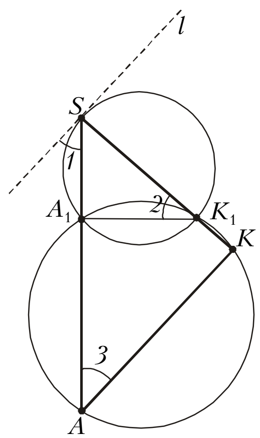

Рис. 12

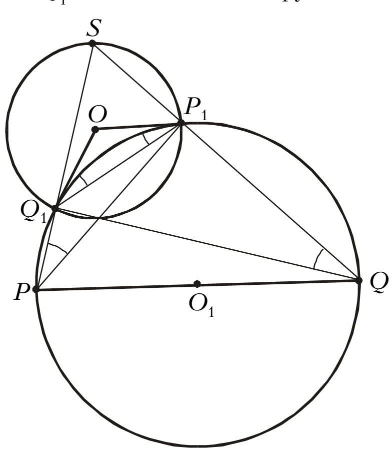

Рис. 13

ти с центром O_1, поэтому

$$\angle SPP_1 = \angle SQQ_1 = \angle OQ_1P_1 = \angle OP_1Q_1,$$

т.е. ΔQ_1OP_1 – равнобедренный и $\angle Q_1O_1P_1 = 180^\circ - 2\angle OQ_1P_1 = 2\left(90^\circ - \angle SPP_1\right) = 2\angle Q_1SP_1$. Отсюда и из равенства $OP_1 = OQ_1$ следует, что O – центр окружности, описанной около ΔSP_1Q_1. Но тогда $OS = OP_1 = OA_1 = OB_1 = OC_1$, т.е. O – центр сферы ω_1.

XXXV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $v = u\sqrt{\cos^2\alpha + (1/4)\sin^2\alpha} \approx 0{,}67$ м/с. **2.** $h_{\min} \approx 20$ см.

3. $t_{а} = \dfrac{t_2\tau_с + t_1\tau_м}{\tau_с + \tau_м} \approx 76\ ^\circ$C (здесь $t_2 = 100\ ^\circ$C),

$t_{б} = \dfrac{t_2\tau_м + t_1\tau_с}{\tau_с + \tau_м} \approx 23{,}8\ ^\circ$C; $\tau_а = \tau_б = \tau_с + \tau_м = 63$ мин.

4. Минимальный ток течет через резистор сопротивлением R_5; $I_{\min} = 2$ мА; максимальный ток течет через резистор сопротивлением R_4; $I_{\max} = U/R_4 = 13{,}3$ мА.

10 класс

1. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (Ф1795).

2. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (Ф1798).

3. $Q = (24/5)\pi\varepsilon_0 UR$; $I = (24/5)\pi UR/\rho$.

4. $I_1 = \left(I_0 - \mathcal{E}_2/R\right)/2$; $v = \dfrac{2I_0 l}{C_0(\varepsilon - 1)\left(2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - I_0R\right)}$.

5. $f_1 = l_1 = 8$ см; $l_3 = \dfrac{l_2F_0}{2F_0 - l_2} = 24$ см.

11 класс

1. $v_{ср} = 2\pi\dfrac{Am}{TM}\operatorname{tg}\alpha$; ящик не будет подпрыгивать при условии $\dfrac{M}{m} > \dfrac{4\pi^2}{gT^2}\dfrac{A}{\cos\alpha}$.

3. $Q = (41{,}2 \pm 0{,}4)$ мкДж.

4. При $0 \le t \le \pi\sqrt{L_1C}$ $\quad I_2(t) = \dfrac{U_0}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L_1}}\sin\omega_{01}t$, где $\omega_{01} = \dfrac{1}{2\sqrt{L_1C}}$, в дальнейшем $I_2(t) = \dfrac{U_0}{10}\sqrt{\dfrac{C}{L_1}}\cos\left(\omega_{02}t + 4\right)$, где $\omega_{02} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{L_1C}}$; см. рис.14, где $t_1 = \pi\sqrt{L_1C}$, $t_2 = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)t_1$, $t_3 = \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)t_1$, $t_4 = \left(1 + \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)t_1$.

5. См. рис.15, 16 (здесь M и N – середины палочки SP и ее изображения $S'P'$ соответственно, MN – оптическая ось линзы, O – центр линзы, F и F' – ее фокусы); в первом случае линза собирающая, а во втором – рассеивающая.

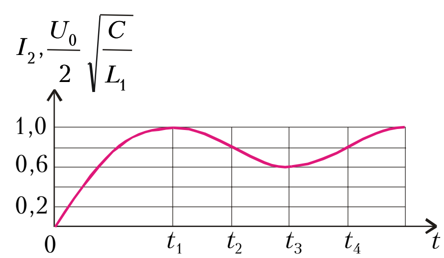

Рис. 14

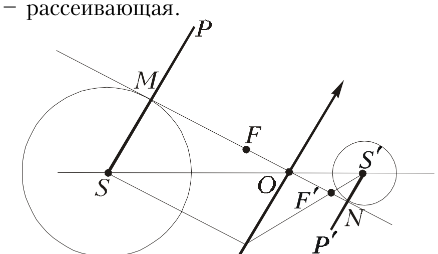

Рис. 14

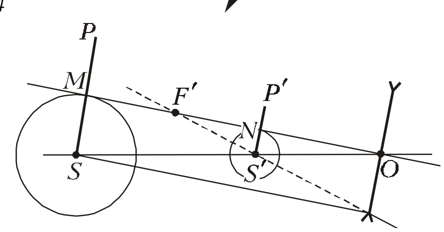

Рис. 15

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

1. *Указание*. Кроме упомянутых мерседесов есть еще 100− − (30 + 20 + 20) = 30 машин, которые отделяют друг от друга мерседесы упомянутых цветов; не более чем 30 немерседесов делят мерседесы на не более чем 31 группу подряд стоящих мерседесов. В одной из групп должно быть не менее трех мерседесов, и по условию они должны быть одного цвета.

2. Пусть мы воспользовались несколько раз первым обменом и теперь хотим вернуть свое добро при помощи второго и третьего обменов. Пусть мы совершили k раз второй обмен, n раз − третий обмен. Тогда мы сбыли $3k + n$ кусков мыла и приобрели $k + 4n$ шил, причем $3k + n = k + 4n$, откуда $2k = 3n$, следовательно, $k = 3t$, $n = 2t$ при некотором t. Проведя эти $5t$ обменов, мы превратили $11t$ кусков мыла в такое же количество шил, т. е. мы скомпенсировали потери от $11t$ обменов первого типа. Итого мы совершили $16t$ обменов.

3. Федины шаги короче.

4. Нет, нельзя. Сторону длины 103 будем считать вертикальной. Каждый прямоугольник 9×14 разобьем на два прямоугольника 7×9. Число 103 представимо в виде суммы числа, делящегося на 7, и числа, делящегося на 9, единственным способом: 103 = 49 + 54. Число 49 аналогично представить нельзя. Заметим, что любая горизонталь (лучше − не идущая по сторонам клеток) имеет длину 49 и рассечена на отрезки − пересечения с прямоугольниками разбиения. В силу сделанного замечания, ни один из этих отрезков не может иметь длину 9, значит, все стороны длины 9 у прямоугольников разбиения ориентированы вертикально. Следовательно, если вертикальная сторона прямоугольника разбиения равна 7, то горизонтальная−обязательно 14. Рассмотрим теперь произвольную вертикаль. Она разбита на отрезки длины 7, 9 и 14. Поскольку отрезки длины 7 и 14 имеют суммарную длину 49, то отрезков длины 7 − нечетное число. Отметим все прямоугольники 7×14, у которых вертикальная сторона равна 7. Отмеченное множество прямоугольников обладает следующим противоречивым свойством: сумма горизонтальных проекций этих прямоугольников − по очевидным причинам число четное, но при этом, в силу того, что каждая вертикаль пересекает нечетное число таких прямоугольников, сумма длин их проекций должна иметь ту же четность, что и горизонтальная сторона большого прямоугольника, т.е. 49 − число нечетное!

5. 2.*Указание.* Разобьем числа на 6 групп: в первую группу возьмем число a_1, а в остальные пять $-\left(a_2,a_3,a_4\right)$, $\left(a_5,a_6,a_7\right)$, …, $\left(a_{14},a_{15},a_{16}\right)$; получим оценку суммы всех чисел $S \ge a_1+10$.

Затем разобьем числа на 4 группы: первая группа − число a_2, остальные − $\left(a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\right)$, $\left(a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12}\right)$, $\left(a_{13},a_{14},a_{15},a_{16},a_1\right)$. Оценив сумму всех чисел, получим $S \le a_2+12$.

Из этих двух неравенств находим, что $a_1-a_2 \le 2$.

В том, что разность a_1-a_2 действительно может принимать значение 2, убедитесь самостоятельно.

6. Рассмотрим первые три фонаря, потом следующие три фонаря и т. д. В каждой такой тройке фонарей вначале был хотя бы один разбитый. Значит, всего было разбито не менее 50 фонарей. Между любым разбитым фонарем и следующим разбитым фонарем было расположено не более двух других фонарей. Поэтому электрик починил хотя бы один из этих разбитых фонарей. Разделим разбитые фонари на пары последовательно стоящих фонарей. Получится не менее 25 пар. В каждой паре электрик починит хотя бы один фонарь, следовательно, он починит не менее 25 фонарей.

7. Выигрывает Вася. *Указание.* Стратегия Васи очень проста: не снимать гирю массой 2001 г, пока на его чаше весов еще есть другие гири.

8. Если шестизначное число делится на 9, то его можно представить в виде $9n$, где $n = \overline{abcdef} \le 111111$. Нам нужно доказать, что десятичная запись числа $9n\cdot111111 = n\cdot999999 = 10^6 n-n$ содержит девятку. Запишем это вычитание в столбик:

$$\begin{array}{r} abcdef000000 \\ abcdef \\ \hline \ldots \end{array}$$

Заметим, что если $f = 0$, то при вычитании в разряде миллионов окажется девятка. Если $n = 111111$, то девятка окажется в разряде единиц. Если же $f \ne 0$ и $n < 111111$, то хотя бы одна из цифр a, b, c, d, e равна 0 и под этой цифрой из-за переносов в меньший разряд в разности будет находиться девятка.

9. 144 операции.

10. $u/v=2/3$. *Указание.* Если $3u\ne2v$, то $n=|3u-2v|>0$, а числа

$$3(nu + 2) - 2(nv + 3) = n(3u - 2v) = \pm n^2$$

и

$$(nu + 2) - (nv + 3) = n(u - v) + 1$$

делятся на НОД $(nu+2, nv+3)$, чего не может быть.

11. Фокусники любым способом разбивают 78 карточек на 39 пар и запоминают это разбиение. Какие бы 40 карт зритель ни отдал первому фокуснику, среди них обязательно окажутся две карты из одной пары (так как пар всего 39). Первый фокусник должен дать зрителю две карты из одной пары. Тогда карта, добавленная зрителем, будет из другой пары, и ее без труда сможет определить второй фокусник.

12. Выигрывает Юра. *Указание.* Игрок не может сделать очередной ход лишь тогда, когда на доске остались только две соседние незакрашенные клетки. Такая ситуация может возникнуть только после хода Юры.

13. *Указание.* Треугольник ACE остроугольный. Поэтому центр его описанной окружности O лежит внутри. Докажите, что O служит центром окружности, касающейся всех сторон пятиугольника. Для этого достаточно проверить, что O лежит на биссектрисах углов A, B, D, E.

14. *Указание.* Прямые BE и BF являются внешними биссектрисами углов AEC_1 и CFA_1. Внешняя биссектриса делит противоположную сторону в таком же отношении, что и внутренняя (точнее, в противоположном по знаку), а также в отношении, равном отношению прилежащих сторон. Поэтому отношение сторон $AE:EC_1$ равно 2 (как и $CF:A_1F$).

Далее докажите, что $\angle AC_1E = \angle CA_1F$, а угол E в треугольнике ABE тупой. Следовательно, угол C_1AE острый. Аналогично, угол A_1CF острый. Тогда треугольники C_1AE и A_1CF подобны, и $\angle C_1BE = \angle A_1BF$.

15. 60°.

Пусть D − точка, симметричная B относительно прямой AL. Ясно, что D лежит на прямой AC. В силу симметрии имеем $KD = KB$ и $\angle BKD = 2\angle BKL = 60°$, значит, треугольник BKD правильный. Заметим, что BC − биссектриса угла KBD, так как $\angle KBC = 30°$; значит, точки D и K симметричны относительно прямой BC. Пусть E −точка пересечения прямых AB и DK. Тогда E симметрична N относительно AL, поэтому треугольник NKE тоже правильный.

Теперь посчитаем углы: $\angle KBM = \angle KDC$ из симметрии относительно AL, $\angle KDC = \angle DKC$ из симметрии относительно BC, углы DKC и MKE равны как вертикальные. Таким образом, $\angle KBM = \angle MKE$. Так как $\angle EMK$ − внешний угол треугольника KBM, получаем, что

$\angle EMK = \angle MKB + \angle KBM = \angle MKB + \angle MKE = \angle BKE = 120°$.

Так как $\angle ENK = 60°$, отсюда следует, что четырехугольник $EMKN$ вписанный. Значит, $\angle AMN = \angle EKN = 60°$.

16. Условие задачи не нарушится, если мы будем считать, что каждый депутат знаком с самим собой. Для каждого депутата рассмотрим множество знакомых с ним депутатов. Из условия следует, что никакие два множества знакомых не совпадают (для любых двух депутатов тот третий, который знаком ровно с одним из них, принадлежит множеству знакомых одного и не принадлежит множеству знакомых другого).

Лемма. Пусть A – один из депутатов. Предположим, что президент приказал поменять партию всем депутатам, не знакомым с A. Тогда в результате этого все депутаты, имеющие не меньше знакомых, чем A (кроме самого A), поменяли партию.

Доказательство, Пусть некоторый депутат B, отличный от A, не поменял партию. Это означает, что B не знаком ни с одним депутатом из числа незнакомых с A. Другими словами, множество знакомых B содержится в множестве знакомых A. Так как эти множества не могут совпадать, количество знакомых B строго меньше, чем количество знакомых A.

Построим депутатов в порядке невозрастания числа знакомых. Докажем, что для любого натурального n президент может добиться того, чтобы первые n депутатов в этом ряду состояли в одной партии. Воспользуемся индукцией. При $n = 1$ утверждение тривиально. Для индукционного перехода предположим, что первые $n - 1$ депутатов уже состоят в одной партии, а n-й депутат (назовем его A) – в другой. Пусть президент прикажет поменять партию всем депутатам, не знакомым с A. Тогда по лемме все, у кого число знакомых не меньше, чем у A (в том числе все те, кто стоят перед A), поменяют партию. Значит, все, кто стоят перед A, окажутся во второй партии. В той же партии по-прежнему будет и сам A, значит, n первых депутатов в ряду будут состоять в одной партии (а именно, во второй). Утверждение доказано.

Следовательно, президент может добиться того, чтобы все депутаты состояли в одной партии. Если это еще не та партия, которую поддерживает он сам, то он прикажет поменять партию всем депутатам сразу, и его цель достигнута.

17. Поскольку для любых натуральных чисел $[m,n](m,n) = mn$, где $(m,n) = \text{НОД}(m,n)$, неравенство можно переписать в виде

$$\frac{mn}{(m,n)} + \frac{(m+1)(n+1)}{(m+1,n+1)} \geq \frac{2mn}{m-n}.$$

Применив к сумме, стоящей в левой части, неравенство о средних, получим, что

$$\frac{mn}{(m,n)} + \frac{(m+1)(n+1)}{(m+1,n+1)} \geq 2\sqrt{\frac{m(m+1)n(n+1)}{(m,n)(m+1,n+1)}} >$$

$$> \frac{2mn}{\sqrt{(m,n)(m+1,n+1)}}. \quad (*)$$

Так как $m-n \,\vdots\, (m,n)$ и $m-n \,\vdots\, (m+1,n+1)$, а числа (m, n) и $(m + 1, n + 1)$ взаимно просты, то $m-n \,\vdots\, (m,n)(m+1,n+1)$. Значит,

$$m-n \geq (m,n)\ (m+1,\ n+1),$$

но тогда правая часть неравенства $(*)$ не меньше чем $2mn/\sqrt{m-n}$.

18. $f(x) = x$ и $f(x) = -2x$.

Пусть $g(y) = y + f(y)$. По индукции легко показать, что при любом натуральном k

$$f(x + kg(y)) = f(x) + 2ky. \quad (*)$$

Если мы подставим вместо x число $x + kg(y)$, то получим, что равенство $(*)$ верно при всех целых k.

Докажем, что функция $f(x)$ линейная. Для этого проверим, что при всех $y \neq 0$ отношение $g(y)/y$ постоянно. Действительно, применяя формулу $(*)$ для $y = y_1$ и $k = g(y_2)$, получаем, что

$$f\left(x + g(y_1)g(y_2)\right) = f(x) + 2g(y_2)y_1.$$

По той же самой формуле для $y = y_2$ и $k = g(y_1)$ имеем

$$f\left(x + g(y_1)g(y_2)\right) = f(x) + 2g(y_1)y_2.$$

Стало быть, $g(y_1)y_2 = g(y_2)y_1$, т.е. $g(y_1)/y_1 = g(y_2)/y_2$. Обозначим это отношение через $\alpha + 1$. Тогда

$$y + f(y) = (\alpha+1)y,$$

откуда $f(y) = \alpha y$ при $y \neq 0$. Заметим, что $\alpha \neq 0$, в противном случае, например, при $x \neq 0$ и $x \neq -f(1) - 1$ должно выполняться равенство

$$0 = f(x + 1 + f(1)) = f(x) + 2 = 2.$$

Покажем далее, что $f(0) = 0$. Для этого подставим в условие на функцию число x, отличное от 0 и $f(0)$, и $y = 0$. Получим $\alpha\,(x + f(0)) = f(x + f(0)) = f(x) = \alpha x$,

откуда $f(0) = 0$. Таким образом, $f(x) = \alpha x$ при всех целых x. Установим, при каких α функция $f(x) = \alpha x$ удовлетворяет условию. Для этого подставим $x = 0$ и $y = 1$, получим квадратное уравнение на α : $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$, откуда $\alpha = 1$ или $\alpha = -2$.

19. Прямоугольники, вырезанные из таблицы, будем называть полосками. Предположим, что полоска 1×20 расположена вертикально. Отрежем от квадрата 20×20 слева и справа по прямоугольнику 1×20. Каждый из них разрежем на 10 прямоугольников 1×2, а оставшуюся часть доски – на 90 квадратов 2×2. Квадраты 2×2 или пару прямоугольников 1×2, расположенных на одной горизонтали по разные стороны квадрата 20×20, назовем *обобщенными квадратами*.

Если одна из клеток обобщенного квадрата была вырезана при вырезании полоски $1 \times k$, то мы будем говорить, что полоска задевает квадрат.

Заметим, что если из какого-то обобщенного квадрата 2×2 нельзя вырезать ни одной доминошки (прямоугольника 1×2), то этот квадрат задевают по крайней мере две полоски. Если из обобщенного квадрата нельзя вырезать две доминошки, то его задевает как минимум одна полоска. Таким образом, если из обобщенного квадрата нельзя вырезать больше чем k доминошек, то его задевает как минимум $2-k$ полоски. Поскольку всего в разбиении ровно 100 обобщенных квадратов, то количество доминошек, которое можно будет заведомо вырезать из квадрата 20×20, будет не меньше чем 200 минус общее число задеваний обобщенных квадратов всеми полосками.

Рассмотрим теперь разрезание на обобщенные квадраты, полученное из первоначального поворотом на 90°. Для этого разрезания также верно, что если из обобщенного квадрата нельзя вырезать больше чем k доминошек, то его задевает как минимум $2 - k$ полоски. Единственное исключение представляет собой пара прямоугольников 1×2, которую задевает полоска 1×20. Из такого обобщенного квадрата нельзя вырезать ни одной доминошки. Для удобства будем считать, что вертикальная полоска 1×20 дважды задевает такой обобщенный квадрат.

Подсчитаем, какое количество обобщенных квадратов задевает полоска $1 \times k$. Для определенности будем считать, что полоска расположена вертикально. Если $k = 2m - 1$, то полоска $1 \times k$ задевает по m обобщенных квадратов первого и второго разрезаний, в сумме $2m = k + 1$. Если $k = 2m$, то полоска $1 \times k$ на одном разрезании задевает m обобщенных квадратов, а на втором $m + 1$, в сумме $2m + 1 = k + 1$. Это равенство будет справедливо и для полоски 1×20, поскольку мы считаем, что она дважды задевает пару прямоугольников 1×2. Подсчитаем общее количество задеваний:

$$2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 21 = 230.$$

Следовательно, для одного из двух разбиений общее количество задеваний полосок будет не более чем 115. Дальше будем рассматривать только это разбиение на обобщенные квадраты. Как уже отмечалось, количество доминошек, которое можно будет вырезать, не меньше, чем удвоенное количество обобщенных квадратов минус общее число задеваний квадратов этого разбиения, т.е. $200 - 115 = 85$.

Приведем пример, который показывает, что вырезать 86 домино, вообще говоря, не удастся. Вырежем полоски из верхней части квадрата 20×20 так, как показано на рисунке 17 (невырезанные клетки закрашены). При таком положении

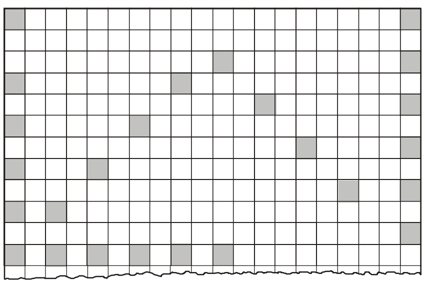

Рис. 17

полосок из верхней части нельзя больше вырезать ни одной доминошки. В нижней части квадрата остается 171 незанятых клеток. Поэтому 86 доминошек разместить в ней не удастся.

20. Выигрывает первый игрок.

Разобьем все натуральные числа, большие 1, на два множества L и W: число n отнесем к множеству L, если оно имеет вид $2^{2^{2k+1}}m+1$, где m нечетно, и к множеству W в противном случае, т.е. если оно имеет вид $2^{2^{2k}}m+1$ (число m снова нечетное). Все четные числа будут принадлежать W.

Покажем, что если на доске написано число из множества W, то его всегда можно превратить в число из множества L. А если на доске оказалось число из множества L, то любой ход переводит его в число из множества W.

Тогда, поскольку вначале на доске выписано число из множества W, первый игрок имеет выигрышную стратегию: каждым ходом он должен превращать число из множества W в число из L. Второй игрок ответным ходом вновь выпишет на доску число из W. Поэтому эта стратегия корректно определена, и числа из множества W будут встречаться только у первого игрока. Так как числа уменьшаются, когда-нибудь ему попадется число 2, и он выпишет на доску единицу.

Пусть на доске написано число $n \in W$, т. е. число вида $2^{2^{2k}}m+1$. Если k положительно, то число $\left[\frac{n+1}{2}\right] = 2^{2^{2k-1}}m+1$ принадлежит L, а если k равно нулю, то $n = m + 1 = (2l+ 1)+ + 1 = 2l + 2$. Следовательно, из n можно получить числа $n - 1 = 2l + 1$ и $\left[\frac{n+1}{2}\right] = l+1$. Одно из этих чисел (если $l \neq 0$), очевидно, принадлежит множеству L. Если же l равно нулю, то оба эти числа равны 1 и игра закончилась.

Если на доске оказалось $n \in L$, т. е. число вида $2^{2^{2k+1}}m+1$, то из него можно получить либо число $n-1 = 2^{2^{2k+1}}m$, которое лежит в W, поскольку является четным, либо число $\left[\frac{n+1}{2}\right] = 2^{2^{2k}}m+1$, тоже принадлежащее множеству W.

21. Докажем утверждение задачи индукцией по n. База $n = 1$ очевидна.

Посетителя, сыгравшего наибольшее количество партий, назовем Гариком. Если Гарик сыграл не больше $(n + 1)/2$ партий, то и все остальные сыграли не более $(n + 1)/2$ партий каждый, и общее количество партий не превосходит $n(n + 1)/2$. Пусть Гарик сыграл хотя бы $(n + 1)/2$ партий. Будем называть партию, в которой не играл Гарик, *интригующей*. Поскольку Гарик сыграл не более n партий (по условию), то достаточно проверить, что интригующих партий не более $n(n - 1)/2$. Это сразу следует из индукционного предположения, если только мы проверим, что множество посетителей без Гарика удовлетворяет условию задачи.

Итак, докажем, что каждый посетитель сыграл не более $n - 1$ интригующих партий и каждые два не игравших друг с другом посетителя сыграли не более $n - 1$ интригующих партий на двоих. Для посетителей, игравших с Гариком (или пар не игравших друг с другом посетителей, один из которых играл с Гариком), это непосредственно вытекает из условия: этот посетитель (соответственно, пара) сыграл(а) всего не больше n партий, стало быть, интригующих – не более $n - 1$. Каждый же из не игравших с Гариком посетителей сыграл не более $(n-1)/2$ партий (поскольку вместе с Гариком они сыграли не больше n), так что для них и пар, составленных из них, утверждение также верно.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Подписано в печать . Тираж экз.

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати

142300 г. Чехов Московской области

Заказ №