Иррациональные уравнения

А.ЕГОРОВ, Ж.РАББОТ

Иррациональные уравнения довольно часто становятся «камнем преткновения» на вступительных экзаменах. О некоторых методах их решения мы и поговорим, причем в основном будем иметь дело с квадратными корнями (радикалами). Как правило, такая задача решается, если нам удается избавиться от радикалов и свести ее к «обычным» уравнениям, не содержащим корней.

Простейшие уравнения

Так мы будем называть уравнения вида

1) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

и

2) $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Именно к ним сводится в итоге решение большинства уравнений, связанных с квадратными корнями. Избавиться от радикалов в простейших уравнениях можно, возведя их почленно в квадрат. Однако при этом могут появиться посторонние корни, так что надо еще позаботиться об их отсеве.

Уравнение первого типа равносильно каждой из двух систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases}$$

поскольку после возведения в квадрат получаем уравнение-следствие $f(x) = g(x)$. Мы должны, решив его, выяснить, принадлежат ли найденные корни области определения исходного уравнения, т.е. выполняется ли неравенство $f(x) \ge 0$ (или $g(x) \ge 0$). На практике из этих систем выбирают для решения ту, в которой неравенство проще.

Рассмотрим пример.

Пример 1. *Решите уравнение*

$$\sqrt{x^2 - x - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}.$$

Решение. Находим корни уравнения $f(x) = g(x)$:

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку для корней нашего квадратного уравнения $x^2 - 1 = -x$, неравенство

$$g(x) \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \ge 0$$

выполняется при $x_2 < 0$ и не выполняется при $x_1 > 0$.

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Обратите внимание на то, что мы при отборе корней обошлись, по сути дела, без непосредственных вычислений.

Уравнение второго типа равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

Школьники довольно часто добавляют к этой системе неравенство $f(x) \ge 0$. Однако обычно этого делать не нужно (и даже опасно, особенно в задачах с параметром), поскольку условие $f(x) \ge 0$ автоматически выполняется для корней уравнения $f(x) = g^2(x)$, в правой части которого стоит неотрицательное выражение — квадрат функции $g(x)$.

Пример 2. *Решите уравнение*

$$\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1.$$

Решение. После возведения в квадрат получаем уравнение $2x^2 + x - 3 = 0$. Его корни $x_1 = 1$, $x_2 = -3/2$. Условию $x \ge 1$ удовлетворяет лишь $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 3. *Решите уравнение*

$$\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = 2x + 1.$$

Решение. После возведения в квадрат и упрощений получаем уравнение

$$x^2 + 6x + 2 = 0$$

с корнями $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{7}$. Условию

$$g(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1/2$$

удовлетворяет лишь корень «с плюсом». В этом можно убедиться, заметив, что

$$-3 + \sqrt{7} > -3 + \sqrt{6{,}25} = -3 + 2{,}5 = -1/2.$$

Но можно поступить и так. Поскольку при $x = -1/2$ значение квадратного трехчлена отрицательное:

$$f(x) = x^2 + 6x + 2 = (-1/2)^2 - 3 + 2 < 0,$$

число $x = -1/2$ лежит между его корнями x_1 и x_2.

Такой прием иногда избавляет от необходимости проводить не очень сложные, но порой утомительные вычисления.

Ответ: $-3 + \sqrt{7}$.

Упражнение 1. Решите уравнения

а) $\sqrt{3x-1} = \sqrt{x-2}$;

б) $\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{2x^2 - 1}$;

в) $\sqrt{x^2 - 5x - 14} = \sqrt{3x - 2}$;

г) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 4}$;

д) $\sqrt{x+1} = x - 1$;

е) $\sqrt{2x+1} = 2x^2 - x - 1$;

ж) $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$;

з) $8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 3$.

Более сложные уравнения

Если в уравнении имеется несколько радикалов или же их нагромождение вроде $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ и т.п., первоначальной целью является избавление от них, что достигается возведением в квадрат (может быть, неоднократным) с тем, чтобы в конце концов прийти к уравнениям, которые мы умеем решать.

Пример 4. *Решите уравнение*

$$\sqrt{8x + 9} - \sqrt{7x - 5} = 2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{8x + 9} = 2 + \sqrt{7x - 5}$$

и возведем в квадрат. После упрощений получим простейшее уравнение

$$4\sqrt{7x - 5} = x + 10, \qquad (1)$$

или, после повторного возведения в

квадрат,

$$x^2 - 92x + 180 = 0. \qquad (2)$$

Возводить в квадрат число 46 без калькулятора — занятие довольно неприятное. Поэтому попробуем угадать корень. Легко понять (просто перебирая первые квадраты: 1, 4, 9, 16, 25... и приравнивая им двучлен $7x-5$ – «наименьший» из подкоренных выражений), что $x_1 = 2$ удовлетворяет уравнению (1), а значит — и (2). По теореме Виета второй корень уравнения (2) это $x_2 = 90$, причем оба корня удовлетворяют второму, а следовательно, и исходному уравнению.

Замечание. Вообще в случаях, когда корни, получаемые в результате последовательных возведений в квадрат, достаточно простые (например, целые), можно не заботиться о равносильности переходов и в конце решения просто проверить их прямой подстановкой. В более сложных случаях, когда прямая проверка затруднена, приходится тщательно следить за возможностью появления посторонних корней.

Пример 5. *Решите уравнение*

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} = 3.$$

Первое решение. Переписываем уравнение так:

$$\sqrt{3x-1} = 3 + \sqrt{x-2}.$$

Возводим в квадрат и упрощаем:

$$3\sqrt{x-2} = x - 4.$$

Повторное возведение в квадрат дает уравнение

$$x^2 - 17x + 34 = 0$$

с корнями

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm 3\sqrt{17}}{2}.$$

Неравенству $x \ge 4$ удовлетворяет лишь $x = \frac{17+3\sqrt{17}}{2}$. (Можно подставить $x = 4$ в трехчлен $x^2 - 17x + 34$ — см. конец решения примера 3.)

Второе решение. Выполним замену $t = \sqrt{x-2} \ge 0$, откуда $x = t^2 + 2$. Приводим уравнение к виду

$$\sqrt{3t^2+5} = 3 + t.$$

После возведения в квадрат и упрощений получаем

$$t^2 - 3t - 2 = 0, \qquad (3)$$

откуда $t_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ (второй корень $t_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ отрицателен). Теперь вычисляем корень исходного уравнения:

$$x = t^2 + 2 = 3t + 4 = \frac{17+3\sqrt{17}}{2}$$

(мы опять воспользовались уравнением (3), для корней которого верно, что $t^2 + 2 = 3t + 4$).

Ответ: $\frac{17+3\sqrt{17}}{2}$.

Вообще же подстановка вида $t = \sqrt{ax+b} \ge 0$ часто упрощает решение уравнений вида

$$\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = e.$$

После замены получаем уравнение вида $\sqrt{kt^2+n} = mt + p$. Существенно здесь то, что при решении квадратного уравнения

$$At^2 + Bt + C = 0,$$

к которому приходим после однократного возведения последнего уравнения в квадрат, приходится выявлять лишь неотрицательные корни, что также достаточно просто.

Рассмотрим теперь два уравнения с «двухэтажными радикалами».

Пример 6. *Решите уравнение*

$$\sqrt{2-\sqrt{x+1}} + \sqrt{2+\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x}.$$

Решение. Возведя уравнение в квадрат и приведя подобные члены, получаем простейшее уравнение

$$\sqrt{3-x} = 2(x-1),$$

решая которое, приходим к ответу.

Ответ: $\frac{7+\sqrt{33}}{8}$.

Пример 7. *Решите уравнение*

$$\sqrt{x+\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2.$$

Решение. Пусть $t = \sqrt{x-1} \ge 0$. Тогда $x = t^2 + 1$, и уравнение принимает вид

$$\sqrt{t^2+t+1} + \sqrt{t^2-2t+1} = 2.$$

Заметив, что под вторым знаком радикала стоит $(t-1)^2$, получаем

$$\sqrt{t^2+t+1} = 2 - |t-1|.$$

При $0 \le t < 1$ имеем

$$\sqrt{t^2+t+1} = 1 + t,$$

откуда

$$t = 0, \text{ а } x_1 = 1.$$

При $t \ge 1$ приходим к уравнению

$$\sqrt{t^2+t+1} = 3 - t,$$

единственный корень которого $t = 8/7$ удовлетворяет условию $t \ge 1$. Итак,

$$x_2 = 1 + 64/49 = 113/49.$$

Ответ: 1; $113/49$.

Рассмотрим еще уравнение с параметром.

Пример 8. *Решите уравнение*

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-2} = a.$$

Решение. ОДЗ исходного уравнения: $x \ge 2$. При этом $(2x-1) - (x-2) = x + 1 > 0$, т.е. левая часть исходного уравнения положительна, поэтому $a \ge 0$. Пусть $t = \sqrt{x-2} \ge 0$. Тогда $x = t^2 + 2$, и уравнение приводится к виду

$$\sqrt{2t^2+3} = a + t.$$

Возведем в квадрат и упростим:

$$t^2 - 2at + 3 - a^2 = 0. \qquad (4)$$

Условие разрешимости этого уравнения дает

$$\frac{D}{4} = 2a^2 - 3 \ge 0,$$

т.е. (учитывая, что $a > 0$) $a \ge \sqrt{3/2}$, при этом $t_{1,2} = a \pm \sqrt{2a^2-3}$.

При $a = \sqrt{3/2}$ уравнение (4) имеет один корень $t = \sqrt{3/2}$, а $x = 3/2 + 2 = 7/2$.

Если $\sqrt{3/2} < a \le \sqrt{3}$, свободный член уравнения (4) неотрицателен и, следовательно, оба его корня неотрицательны (ведь $t_1 + t_2 = 2000$). Для них

$$x_{1,2} = t_{1,2}^2 + 2 = 3a^2 - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2-3}.$$

Если же $a > \sqrt{3}$, годится только неотрицательный корень (с плюсом), т.е. тогда

$$x = 3a^2 - 1 + 2a\sqrt{2a^2-3}.$$

Ответ: корней нет при $a < \sqrt{3/2}$;
$x = 7/2$ при $a = \sqrt{3/2}$;
$x_{1,2} = 3a^2 - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2-3}$ при $\sqrt{3/2} < a \le \sqrt{3}$;
$x = 3a^2 - 1 + 2a\sqrt{2a^2-3}$ при $a > \sqrt{3}$.

Упражнения

2. Решите уравнения

а) $\sqrt{8x+1} - \sqrt{x-2} = 4$;

б) $\sqrt{3x+2} - \sqrt{x-1} = 2$;

в) $2x^2 + \sqrt{2x^2-4x+12} = 4x + 8$;

г) $\sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}$;

д) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$;

е) $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+x+5} = \sqrt{2x^2+2x+17}$;

ж) $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2$;

з) $\sqrt{9-\dfrac{9}{x}}=x-\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}$.

3. Решите уравнения с параметром

а) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-a}=2$;

б) $\sqrt{2x+a}-\sqrt{x-1}=a$;

в) $\sqrt{2x+a}-\sqrt{x-a}=2$;

г) $\sqrt{2x+a}-\sqrt{x-a}=2a$.

Умножим на сопряженное

В основе рассматриваемого способа решения лежит формула

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b.$$

Выражения $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ мы будем называть сопряженными. Иногда использование этой формулы облегчает решение.

Пример 9. *Решите уравнение*

$$\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3}=2x-1.$$

Решение. Домножим левую и правую части уравнения на сумму радикалов, стоящих в левой части. Получается уравнение

$$2(2x-1)=(2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right),$$

равносильное такому:

$$(2x-1)\left(2-\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right)\right)=0,$$

откуда либо $x=1/2$, либо

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}=2.$$

Последнее уравнение решим уже рассмотренным способом: пусть $t=\sqrt{x+3}\geq 0$. Тогда приходим к уравнению

$$\sqrt{5t^2-14}=2-t,$$

откуда $t=\dfrac{-1+\sqrt{19}}{2}$, а $x=\dfrac{4-\sqrt{19}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{4-\sqrt{19}}{2}$.

Заметим, что умножение на сумму радикалов в данном случае не приводит к появлению посторонних корней — ведь область определения этой суммы та же, что у исходного уравнения, и она положительна как сумма неотрицательных слагаемых, не обращающихся, очевидно, в ноль одновременно.

Отметим также, что решить уравнение из примера 9 «в лоб» довольно трудно — оно путем громоздких вычислений сводится к уравнению четвертой степени.

Посмотрите, насколько эффективно работает этот метод в двух следующих примерах, которые оказались по силам очень небольшому проценту поступающих.

Пример 10 (геологический факультет МГУ, 1985). *Решите уравнение*

$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=$$
$$=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}.$$

Решение. Пусть $A=3x^2-1$, $B=3x^2+2x+1$, $C=x^2-x+1$, $D=x^2+2x+4$. Перепишем наше уравнение:

$$\sqrt{C}-\sqrt{D}=\sqrt{B}-\sqrt{A},$$

откуда (так как $\sqrt{m}-\sqrt{n}=\dfrac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$) получаем

$$\frac{C-D}{\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\frac{B-A}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}.$$

Поскольку $C-D=-3(x+1)$, а $B-A=2(x+1)$, приходим к равенству

$$\frac{-3(x+1)}{\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\frac{2(x+1)}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(\frac{2}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}+\frac{3}{\sqrt{C}+\sqrt{D}}\right)=0,$$

а поскольку второй сомножитель, очевидно, положителен, имеем $x=-1$. Проверкой убеждаемся, что $x=-1$ — корень данного уравнения.

Ответ: -1.

Пример 11 (геологический факультет МГУ, 1985). *Решите уравнение*

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=$$
$$=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

Указание. Область определения уравнения: $x\geq -1/2$, при таких x мы можем применить формулу $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$. Поэтому перепишем уравнение так:

$$\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right)=4.$$

Домножив левую и правую части на разность $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}$, получим

$$\sqrt{2x-1}-3=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}.$$

Осталось возвести в квадрат, а затем найти и проверить корни.

Ответ: 7.

Упражнение 4. Решите уравнения

а) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+4}=4x+3$;

б) $\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-x+1}=4x-3$;

в) $\sqrt{45x+12}-\sqrt{15x+2}=\sqrt{10}(3x+1)$;

г) $\sqrt{(x+4)(2x+3)}-3\sqrt{x+8}=$
$=4-\sqrt{(x+8)(2x+3)}+3\sqrt{x+4}$;

д) $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2+2}=$
$=\sqrt{3x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+3x-1}$;

е) $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=$
$=|5-x|$.

В школьном курсе математики вы изучали свойства многих элементарных функций. Их иногда можно с успехом применять и при решении уравнений. Ограничимся несколькими примерами.

Монотонность функций

Начнем с примера.

Пример 12. *Решите уравнение*

$$\sqrt{7x+9}+\sqrt{15x+1}=9-\sqrt{2x-1}.$$

Решение. Это уравнение можно попытаться решить возведением в квадрат (трижды!). Однако при этом, во-первых, получится уравнение четвертой степени и, во-вторых, его коэффициенты будут ужасны. Попробуем угадать корень. Это сделать нетрудно: $x=1$. Теперь заметим, что левая часть уравнения — возрастающая функция, а правая — убывающая. Но это значит, что больше одного корня такое уравнение иметь не может. Итак, $x=1$ — единственный корень.

Ответ: 1.

Вообще в случае (это относится не только к иррациональным уравнениям), если уравнение имеет вид

$$f(x)=0,$$

где $f(x)$ возрастает (убывает), или

$$f(x)=g(x),$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ «встречно монотонны», т.е. $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает, то такое уравнение имеет не более одного корня. Если вам удалось заметить это или привести уравнение к такому виду и если вы сможете угадать корень, то он и будет решением данного уравнения.

И еще один любопытный пример.

Пример 13. *Решите уравнение*

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=x.$$

Здесь после освобождения от радикалов получится полное уравнение 4-й степени, так что поищем какой-нибудь другой путь решения.

Решение. Пусть $f(x)=\sqrt{1+x}$. Наше уравнение имеет вид

$$f(f(x))=x. \qquad (5)$$

Заметим, что функция $f(x)$ возрастающая, и докажем, что уравнение (5) равносильно уравнению

$$f(x) = x. \qquad (6)$$

Для этого заметим, что всякий корень уравнения (6) есть корень уравнения (5). Пусть x_0 — корень уравнения (5), причем $f(x_0) \neq x_0$. Тогда либо $f(x_0) > x_0$, но при этом $f(f(x_0)) = x_0 > f(x_0)$, противоречие; либо $f(x_0) < x_0$, но в этом случае $x_0 = f(f(x_0)) < f(x_0)$, т.е. $x_0 < f(x_0)$, что также невозможно. Утверждение доказано. Чтобы завершить решение, достаточно решить уравнение $x = \sqrt{1+x}$.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 5. Решите уравнения

а) $\sqrt{15x+4} + \sqrt{x+1} = 9$;

б) $x\left(\sqrt{x^2+3x+5} + \sqrt{x}\right) = 5 - x^2$;

в) $\sqrt{x^2+2x+6} + \sqrt{x+3} = 6 - x$;

г) $x^2 - 3\sqrt{3x+1} = 1$.

Область определения

На следующем примере мы рассмотрим еще один класс задач.

Пример 14. *Решите уравнение*

$$\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+7} - \sqrt{4x+1}.$$

Решение. В области определения данного уравнения должны одновременно выполняться неравенства $4 - x^2 \geq 0$ и $x \geq 2$, что возможно только при $x = 2$. Проверкой убеждаемся, что это — корень.

Ответ: 2.

Упражнение 6. Решите уравнения

а) $\sqrt{x^2-3x+2} + 2\sqrt{4-x^2} + 1 = \sqrt{x-1}$;

б) $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{x}} + \sqrt{x^2-x-2} + \sqrt{3x^2+4} = 4$.

Ограниченность функций

Здесь мы тоже разберем достаточно характерные примеры.

Пример 15. *Решите уравнение*

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} - x^2 = 5 + 2x.$$

Решение. Перепишем уравнение:

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} = x^2 + 2x + 5.$$

Пусть $t = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+5}$. Тогда

$$t^2 = 8 + 2\sqrt{15-2x-x^2}.$$

Наибольшее значение подкоренного выражения достигается при $x = -1$ (в вершине параболы $y = 15 - 2x - x^2$). При этом $t^2 = 16$. Отсюда следует, что $t \leq 4$. Наименьшее значение правой части исходного уравнения достигается также при $x = -1$ и тоже равно 4. При $x \neq -1$ левая часть (когда она существует) меньше правой.

Ответ: -1.

И наконец. еще один пример, в решении которого мы воспользуемся свойством суммы двух взаимно обратных положительных чисел: $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$, причем равенство достигается лишь при $a = 1$.

Пример 16. *Решите уравнение*

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{2x-1}} = \sqrt{4x-x^2}.$$

Решение. Пусть $t = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}} > 0$. Левая часть уравнения, равная $t + \dfrac{1}{t}$, больше или равно 2:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2,$$

а правая часть не больше 2:

$$\sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4-(x-2)^2} \leq 2.$$

Поэтому равенство возможно только при $x = 2$. Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ — корень.

Ответ: 2.

Упражнение 7. Решите уравнения

а) $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$;

б) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6$.