Три теоремы о выпуклых многогранниках

Н.ДОЛБИЛИН

Многогранные формы окружают нас повсюду. Почти все сооружения, возведенные человеком, от древнеегипетских пирамид до современных небоскребов, имеют форму многогранников. Многогранные формы встречаются у многих минералов и, что особенно удивительно, у некоторых растений и даже живых организмов (радиолярий; рис.1).

Серьезный интерес к многогранникам возник около четырех тысяч лет тому назад и проявлялся не только в рамках математики и ее приложений. Платон и Кеплер привлекали многогранники для философского и научного осмысления окружающего мира. Благодаря изяществу своих форм многогранники вошли в искусство (живопись, скульптура).

В статье будет рассказано о трех изумительных теоремах о выпуклых многогранниках. Первая из них – знаменитая теорема Эйлера о соотношении между количеством вершин, ребер и граней в многограннике. Как было позднее осознано, она явилась первой теоремой топологии – области математики, которая изучает геометрические свойства фигур, например многогранников, не зависящие от длин ребер, величин

Иллюстрация Л.Тишкова

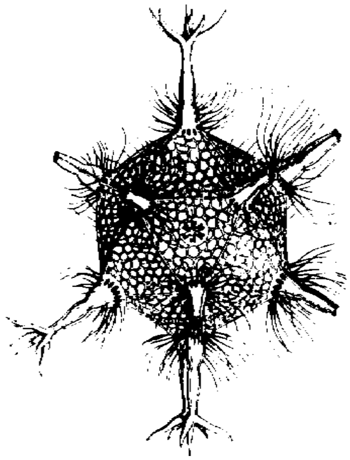


Рис.1

плоских или двугранных углов, площадей граней и, вообще, от всего, что так или иначе определяется расстоянием между точками.

Вторая замечательная теорема была доказана в 1813 году французским математиком Огюстеном Коши. Эта теорема утверждает, что если из данных плоских многоугольников, взятых в одинаковом порядке, можно склеить выпуклый многогранник, то такой многогранник будет единственным. В частности, теорема Коши объясняет то, что известно каждому, кто клеил или держал в руках картонную модель многогранника: ее жесткость. Это свойство удивляет потому, что многогранник, казалось бы, должен задаваться не только своими гранями, но и двугранными углами. Смотрите: для задания многоугольника, если это не треугольник, недостаточно только длин сторон, нужно задать и углы. А вот многогранник задается однозначно лишь своими гранями. И это несмотря на то, что каждые две смежные по ребру грани, взятые сами по себе, легко поворачиваются вокруг общего ребра, словно книжные страницы вокруг корешка... В процессе склеивания модель будущего многогранника какое-то время сохраняет подвижность из-за изменения двугранных углов. Но как только заклеивается последняя грань, двугранные углы фиксируются и модель становится жесткой. Доказательство теоремы Коши элементарное, что не означает «легкое». Однако единственное, что нужно знать помимо школьной программы, чтобы понять доказательство, – это теорема Эйлера.

Третья совершенно удивительная теорема была открыта и доказана выдающимся геометром XX века академиком Александром Даниловичем Александровым (1912–1999). Если теорема Коши говорит о единственности выпуклого многогранника с данной разверткой его граней, то теорема Александрова сообщает необходимые и достаточные условия, при которых из развертки можно склеить выпуклый многогранник. Как мы увидим позже, в отличие от теоремы Коши, теорема Александрова весьма неожиданна. Многие развертки, удовлетворяющие условиям Александрова, кажутся непригодными для того, чтобы из них можно было склеить какой-либо многогранник. Но уверенность в том, что теорема верна, заставляет искать и в итоге находить тот многогранник, который склеивается из данной развертки. В отличие от предыдущих теорем доказательство теоремы Александрова неэлементарное и трудное.

Многогранник – это тело или поверхность?

Одни считают, что многогранник – это поверхность, состоящая из плоских граней. Другие возражают: нет, многогранник – это трехмерное тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Кто прав? И те, и другие. Все зависит от контекста. Для столяра, сколачивающего ящик из шести фанерных прямоугольников, параллелепипед – это поверхность, а для каменщика, возводящего кирпичную стену, параллелепипед – это, наверное, тело. В этой статье мы будем представлять многогранник в основном как поверхность.

Будем называть *многогранником* множество M плоских выпуклых многоугольников – *граней*, расположенных в пространстве так, что

1) каждая сторона любого многоугольника является стороной в точности еще одного многоугольника из M (эта сторона, общая для двух многоугольников, называется *ребром*);

2) от каждого многоугольника из M к любому другому можно пройти по цепочке многоугольников из M, в которой каждые два последовательны многоугольника смежны по общей стороне;

3) если два многоугольника имеют общую вершину, то такую цепочку можно составить из многоугольников, сходящихся в этой вершине.

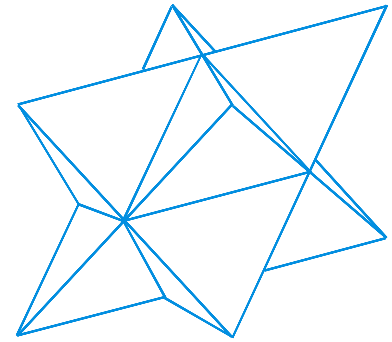


Рис.2

Фигура на рисунке 2 является многогранником. Совокупность из 18 квадратов на рисунке 3 многогранником не является, потому что в ребре AB нарушается условие 1), а в

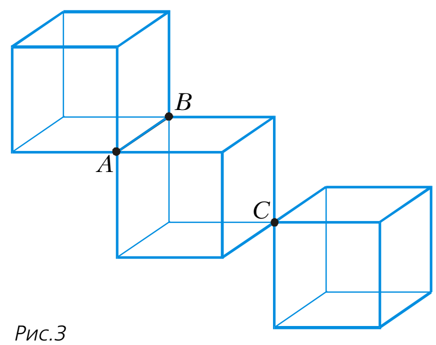


Рис.3

вершине C не соблюдается условие 3).

Упражнение 1. Докажите, что в любом многограннике имеются по крайней мере две одноименные грани.

Многогранник называется *выпуклым*, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Теорема Эйлера

Эта теорема впервые появилась в журнале Петербургской Академии наук в работах Леонарда Эйлера[1] «Элементы учения о телах» и «Доказательство некоторых замечатель-

[1] *Леонард Эйлер (1707, Базель, Швейцария – 1783, Санкт-Петербург), гениальный математик, в течение 31 года проработал в Петербурге, член Петербургской Академии наук. Нам, гражданам России XXI века, любопытно узнать, что современник Эйлера знаменитый математик Иоганн Бернулли в связи с переездом Эйлера из Швейцарии в Россию писал: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают». Общепризнано, что Эйлер на проглядел ничего в современной ему математике, хотя последние семнадцать лет своей жизни он был слепым.*

ных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями».

Теорема Эйлера. *Пусть В – число вершин выпуклого многогранника, Р – число его ребер и Г – число граней. Тогда верно равенство*

$$B - P + \Gamma = 2\,. \qquad (*)$$

Число $\chi = B - P + \Gamma$ называется *эйлеровой характеристикой* многогранника. Согласно теореме Эйлера, для выпуклого многогранника эта характеристика равна 2. То, что эйлерова характеристика равна 2 для многих знакомых нам многогранников, видно из следующей таблички:

Многогранник	B	P	Γ	χ
тетраэдр	4	6	4	2
куб	8	12	6	2
октаэдр	6	12	8	2
n-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$	2
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$	2

Обобщенная теорема Эйлера

В действительности мы докажем более общую теорему, которая верна не только для выпуклых многогранников, но для произвольных графов на сфере.

Поместим внутри выпуклого многогранника M сферу S. Центр O сферы S также лежит внутри многогранника M. Спроектируем многогранник M из центра O на сферу. Так как многогранник выпуклый, то всякий луч с началом в точке O, лежащей внутри многогранника, пересекает многогранник в единственной точке, которая проектируется в некоторую точку на сфере. Так что проектирование является взаимно однозначным соответствием между точками многогранника и точками сферы. При этом вершины многогранника проектируются в точки на сфере, а ребра проектируются в дуги больших окружностей. Эти точки-вершины и дуги-ребра образуют граф G, расположенный на сфере S. Ребра этого графа разбивают сферу на области, которые являются проекциями граней многогранника. Футбольный мяч, сшитый из пятиугольников и шестиугольников, можно рассматривать как проекцию многогранника на сферу (рис.4).

Рис.4

Рассмотрим теперь на сфере совершенно произвольный граф G, состоящий из B вершин и P ребер. Каждое ребро имеет два конца, являющиеся вершинами графа. При этом предполагаем, что любые два ребра либо имеют общую вершину, либо не пересекаются вовсе. Граф G, вообще говоря, может распадаться на некоторое число K связных частей (компонентов). В каждом компоненте, по определению, от любой вершины к любой другой вершине компонента можно перейти по цепочке ребер из графа. И, наоборот, вершины из разных компонентов связать реберным путем невозможно. Граф разбивает сферу на какое-то число Γ связных областей.

Например, граф G на рисунке 5 имеет 18 вершин, 12 ребер, 3 области («нос», «рот» и все остальное). Граф состоит из 8 связных компонентов.

Если граф G является проекцией выпуклого многогранника на сферу,

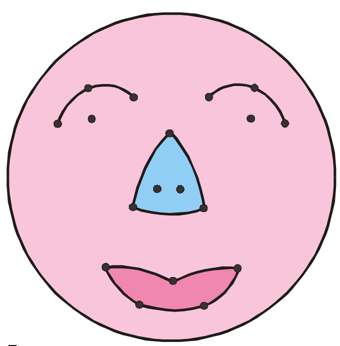


Рис.5

то число B вершин графа – это число вершин многогранника, число P ребер графа – это число ребер многогранника, число Γ областей на сфере – это число граней многогранника, а число K компонентов равно 1.

Обобщенная теорема Эйлера. *Для графа на сфере верно равенство*

$$B - P + \Gamma - K = 1. \qquad (**)$$

Доказательство. Заметим, что так как для выпуклого многогранника $K = 1$, то из этой теоремы немедленно вытекает «обычная» теорема Эйлера для выпуклого многогранника.

Рассмотрим теперь особый граф, который назовем «звездное небо». Этот граф содержит лишь одни вершины и не содержит ни одного ребра. Такой граф действительно напоминает совокупность звезд на небесной сфере. Он состоит из некоторого числа B вершин. Так как в графе нет ребер, то сфера не разбивается на различные области, т.е. $\Gamma = 1$. По той же причине отсутствия ребер в графе столько же компонентов, сколько вершин: $B = K$. Поэтому для «звездного неба» обобщенная формула $(**)$ верна: $B - 0 + 1 - K = 1$. Обобщенная формула Эйлера верна и для графа на рисунке 5, а именно: $18 - 12 + 3 - 8 = 1$.

Пусть G – произвольный граф, содержащий ребро. Мы покажем, что из графа G можно выбросить ребро так, что для старого графа G и нового графа G' соответствующие суммы равны: $B - P + \Gamma - K = B' - P' + \Gamma' - K'$.

Возможны два случая.

1) Пусть в графе G существует ребро e со свободным концом, т.е. хотя бы один конец у ребра e не принадлежит никакому другому ребру. Например, в графе на рисунке 5 ребро из «брови» имеет свободный конец. Удалим это ребро. Условимся, что, удаляя ребро e, мы оставляем обе его концевые вершины. Таким образом, для нового графа имеем: $B' = B$, $P' = P - 1$. Так как у ребра e хотя бы один конец был свободным, то к ребру e с обеих его сторон прилегает одна и та же область. Другими словами, это ребро не разделяет в графе G никаких двух областей. Поэтому удаление ребра e не приводит к уменьшению числа областей в графе G': $\Gamma' = \Gamma$. А вот число компонентов при удалении ребра со свободным концом увеличивается на 1 за счет того, что две концевые вершины ребра e в графе G принадлежат одному компоненту, а после удаления ребра – разным. Итак, $K' = K + 1$. Поэтому у графа G' сумма

$$\begin{aligned} B' - P' + \Gamma' - K' &= \\ = B - (P-1) + \Gamma - (K+1) &= \\ = B - P + \Gamma - K& \end{aligned}$$

та же, что и у G.

2) А что делать, если в графе G нет ни одного ребра со свободным кон-

цом? В этом случае в каждой вершине графа, к которой подходит хотя бы одно ребро, сходятся, как минимум, два ребра. По этой причине в графе G можно найти *простой замкнутый* реберный путь. *Замкнутый* – это путь, который возвращается туда, откуда он вышел, а *простой* путь, подобно окружности, не пересекает сам себя. В графе на рисунке 5 «нос» и «рот» образуют простой замкнутый контур. Опять же, подобно окружности, простой замкнутый путь разбивает сферу на две области. Это очевидное на первый взгляд утверждение доказывается очень непросто и известно в математике как теорема Жордана.

Почему в графе G, не содержащем ребер со свободным концом, имеются простые замкнутые реберные пути? Давайте отправимся в путь из произвольного ребра графа, переходя каждый раз от одного ребра через его концевую вершину к соседнему ребру. Так как в каждой вершине, в которую мы приходим, сходится не меньше двух ребер, то можно путешествовать по ребрам графа сколь угодно долго. Но вершин в графе конечное число. Поэтому рано или поздно наступит такой момент, когда мы впервые придем в вершину, скажем A, в которой были уже прежде. Тогда реберный путь w, пройденный от вершины A до первого возвращения в эту же вершину, будет очевидно простым и замкнутым. Удалим из пути w какое-нибудь ребро e. Число вершин не изменится: $B' = B$. Число ребер уменьшится на единицу: $P' = P - 1$. Так как по разные стороны от удаленного ребра e лежали разные области, то после удаления ребра они объединятся в одну область. Значит, число областей уменьшится на единицу: $\Gamma' = \Gamma - 1$. При этом число компонентов в графе не уменьшится. Действительно, концевые вершины удаленного ребра e можно соединить и в графе G'. Для этого нужно пройти от одной концевой вершины ребра e к другой по дополнительной части замкнутого пути w. Поэтому любые две вершины v и v', соединенные некоторым путем в графе G, можно соединить и в графе G', заменив при необходимости выкинутое ребро e на путь, соединяющий концевые вершины этого ребра.

Итак, и в случае 2) всегда можно найти ребро, при удалении которого сумма

$$B' - P' + \Gamma' - K' = B - (P - 1) + + (\Gamma - 1) - K = B - P + \Gamma - K$$

также не меняется.

Таким образом, мы из любого графа можем удалить ребро, не меняя при этом суммы $B - P + \Gamma - K$. В результате последовательного удаления всех ребер мы приходим к графу «звездное небо», для которого обобщенная формула, как было проверено выше, верна. Следовательно, обобщенная формула верна и для исходного графа G.

Обобщенная теорема Эйлера доказана.

Следствия из теоремы Эйлера

Теорема Эйлера играет огромную роль в математике. С ее помощью было доказано огромное количество теорем. Находясь в центре постоянного внимания со стороны математиков, теорема Эйлера получила далеко идущие обобщения. Более того, эта теорема открыла новую главу в математике, которая называется *топологией*.

Во время работы над своей теоремой Эйлер вывел из нее несколько утверждений, относящихся к выпуклым многогранникам:

1) $P + 6 \le 3B$ и $P + 6 \le 3\Gamma$;

2) $\Gamma + 4 \le 2B$ и $B + 4 \le 2\Gamma$;

3) у всякого многогранника есть хотя бы одна треугольная, четырехугольная или пятиугольная грань, а также хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол;

4) сумма плоских углов всех граней многогранника равна $2\pi B - 4\pi$.

Мы докажем первое неравенство и последнее утверждение, оставив остальное для самостоятельной работы.

Докажем неравенство $P + 6 \le 3B$. Перепишем соотношение Эйлера дважды, один раз в виде

$$P + 2 = B + \Gamma$$

и другой раз в виде

$$4 = 2B - 2P + 2\Gamma.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$P + 6 = 3B + 3\Gamma - 2P.$$

Так как у каждой грани многогранника не менее трех сторон, то $3\Gamma \le 2P$. Отсюда сразу получаем $P + 6 \le 3B$.

Докажем утверждение 4). Обозначим через Γ_i число i-угольных граней в многограннике M. Ясно, что

$$\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \ldots \quad (1)$$

Ясно также, что каждая i-угольная грань содержит i ребер многогранника. С другой стороны, каждое ребро многогранника принадлежит в точности двум граням. Поэтому в сумме $3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \ldots$ каждое ребро многогранника подсчитано, причем подсчитано дважды. Отсюда имеем

$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \ldots \quad (2)$$

Рассмотрим теперь сумму S плоских углов многогранника:

$$S = \Gamma_3 \cdot \pi + \Gamma_4 \cdot 2\pi + \ldots \ldots + \Gamma_i \cdot (i-2)\pi + \ldots \quad (3)$$

С учетом соотношений (1) и (2) и теоремы Эйлера соотношение (3) можно переписать так:

$$S = \Gamma_3(3-2)\pi + \Gamma_4(4-2)\pi + \ldots \ldots + \Gamma_i(i-2)\pi + \ldots = 2P\pi - 2\Gamma\pi = = 2B\pi - 4\pi.$$

Утверждение 4) доказано.

Упражнения

2. Докажите, что для выпуклого многогранника а) $P + 6 \le 3\Gamma$; б) $\Gamma + 4 \le 2B$; в) $B + 4 \le 2\Gamma$.

3. Докажите, что у выпуклого многогранника есть либо по меньшей мере одна треугольная грань, либо трехгранный угол при вершине.

Утверждение 4) по существу эквивалентно важной теореме о многогранниках, доказанной французским математиком Рене Декартом (1596–1650).[2]

Возьмем произвольную вершину v многогранника и соответствующий многогранный угол с вершиной в v. Пусть $\alpha(v)$ – сумма всех плоских углов этого пространственного угла. Легко показать, что у выпуклого многогранного угла сумма плоских углов строго меньше 2π. Разность $\omega(v) = 2\pi - \alpha(v)$ называется *кривизной* вершины v. Таким образом, кривизна вершины выпуклого многогранника строго положительна. Например, кривизна вершины куба

[2] *Создав координатный метод, чтобы «поверить алгеброй» геометрию, и тем самым, по мнению некоторых весьма уважаемых математиков, «звуки (геометрии) умертвив», Декарт в то же время был первым геометром, который после древних греков занимался общей теорией многогранников.*

равна $\pi/2$, вершины правильного тетраэдра – π, октаэдра – $2\pi/3$.

Сумма кривизн всех вершин $\sum_{v \in M} \omega(v)$ многогранника M называется *кривизной многогранника*. Декарт доказал следующую теорему [3].

Теорема Декарта. *Кривизна $\omega(M)$ любого выпуклого многогранника M равна 4π.*

Легко проверить, что $\omega(M) = 4\pi$ для куба или правильного тетраэдра. Чтобы лучше понять, почему кривизна любого многогранника равна 4π, полезно подсчитать кривизну произвольного тетраэдра.

Значение кривизны многогранника выводится из утверждения 4) в одну строчку:

$$\omega(M) = \sum_{v \in M} \omega(v) = \sum_{v \in M} \left(2\pi - \alpha(v)\right) =$$

$$= \sum_{v \in M} 2\pi - \sum_{v \in M} \alpha(v) = B \cdot 2\pi - S = 4\pi.$$

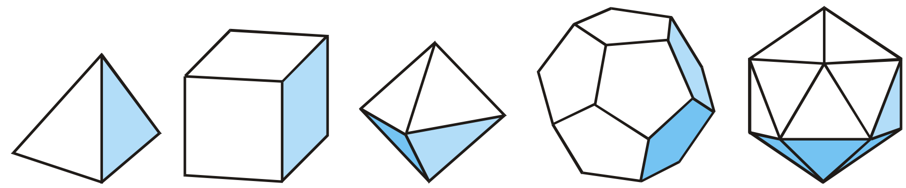
Как отмечал Эйлер в одной из своих работ, многоугольники на плоскости можно классифицировать по числу сторон (или, что все равно, по числу вершин): треугольники, четырехугольники и т.д., в то время как аналогичный вопрос описания многогранников оказывается гораздо сложнее. Теорема Эйлера помогает немного разобраться в этом вопросе.

Например, из теоремы Эйлера нетрудно вывести, что *если все грани выпуклого многогранника суть треугольники, причем в некоторых вершинах они сходятся по шесть, а во всех остальных по пять граней, то вершин, в которых сходятся пять граней, будет ровно двенадцать.* Естественно спросить, а сколько при этом у многогранника вершин, в которых встречается шесть многоугольников. Канадский математик Бранко Грюнбаум обнаружил, что при тех же предположениях число вершин, в которых встречается шесть треугольных граней, может быть любым, кроме единицы.

Правильные многогранники и теорема Эйлера

Одно из древнейших упоминаний о правильных многогранниках на-

[3] *Вообще говоря, теорема о кривизне многогранника справедлива не только для выпуклых многогранников, но и для невыпуклых многогранников, гомеоморфных сфере.*



тетраэдр *куб* *октаэдр* *додекаэдр* *икосаэдр*

Рис.6

ходится в трактате Платона (427–347 до н.э.) «Тимаус». Поэтому правильные многогранники также называются платоновыми телами (хотя известны они были задолго до Платона). Каждый из правильных многогранников, а всего их пять (рис.6), Платон ассоциировал с четырьмя «земными» элементами: земля (куб), вода (икосаэдр), огонь (тетраэдр), воздух (октаэдр), а также с «неземным» элементом – небом (додекаэдр). Знаменитый математик и астроном Кеплер построил модель Солнечной системы как ряд последовательно вписанных и описанных правильных многогранников и сфер.

Имеется несколько эквивалентных определений правильных многогранников. Одно из них звучит так: многогранник называется правильным, если существуют три концентрические сферы, одна из которых касается всех граней многогранника, другая касается всех его ребер и третья содержит все его вершины (определение А). Это определение напоминает одно из возможных определений правильного многоугольника: многоугольник называется правильным, если он вписан в некоторую окружность и описан около другой окружности, причем эти окружности концентричны.

Мы воспользуемся другим определением: правильным многогранником называется такой выпуклый многогранник, все грани которого суть одинаковые правильные многоугольники и все двугранные углы попарно равны (определение В).

Упражнения

4. Докажите эквивалентность определений А и В.

5. Покажите, что в случае правильного многогранника требование существования лишь двух сфер, вписанной и описанной, и их концентричности недостаточно (постройте пример неправильного многогранника, для которого существуют концентрические вписанная и описанная сферы).

Обратим внимание на замечательное обстоятельство. Если правильные многоугольники существуют с любым числом сторон $n \geq 3$, то правильных многогранников (с точностью до подобия) всего пять и число граней у них равно 4, 6, 8, 12 или 20. Докажем это.

Обозначим через p число сторон у грани правильного многогранника. Так как двугранные углы равны, то все пространственные углы в правильном многограннике также равны. Поэтому в каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число граней, которое мы обозначим через q.

Используя правильность граней и равенство двугранных углов, древние греки легко получили, что для правильных многогранников пары целых чисел (p, q) могут быть лишь такими: (3, 3), (4, 3), (3, 4), (3, 5), (5, 3). Однако благодаря теореме Эйлера мы можем получить те же пять пар чисел не только для правильных многоугольников, но и вообще для произвольных выпуклых многогранников, у которых каждая грань имеет одинаковое число p сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число q граней.

Действительно, так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, а каждая грань имеет ровно p ребер, то $p \cdot \Gamma$ равно удвоенному числу ребер в многограннике: $p \cdot \Gamma = 2P$. Поскольку каждое ребро имеет ровно два конца, а в каждой вершине сходится ровно q ребер, то $q \cdot B = 2P$. Итак, мы имеем

$$\Gamma = \frac{2P}{p} \text{ и } B = \frac{2P}{q}. \qquad (4)$$

Подставим соотношения (4) в формулу Эйлера:

$$\frac{2P}{q} + \frac{2P}{p} = P + 2. \qquad (5)$$

Найдем P из (5):

$$P = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}. \qquad (6)$$

Знаменатель дроби в (6) равен $4-(p-2)(q-2)$. А так как знаменатель положителен, то $(p-2)(q-2)<4$. С другой стороны, как число p сторон у грани, так и число q граней, сходящихся в вершине, не меньше 3. Поэтому нетрудно проверить, что уравнение (5) при условии $p \ge 3$, $q \ge 3$ имеет пять и только пять целочисленных решений (p,q): $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(3,5)$ и $(5,3)$.

Отсюда следует, что комбинаторно различных многогранников, у которых все грани одноименные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней, не более пяти.

Вернемся теперь к правильным многогранникам. Соответствующая правильному многограннику пара чисел $(p,\ q)$ называется его символом Шлефли. Мы показали, что у правильного многогранника может быть один из пяти символов Шлефли. Проверим теперь, что для каждого из символов Шлефли существует правильный многогранник.

Легко проверить, что символу Шлефли $(3,3)$ соответствует правильный тетраэдр, а символу $(4,3)$ – куб. К многограннику с символом Шлефли $(3,4)$ – октаэдру – легко прийти от куба. Нужно взять центры квадратных граней куба – их шесть. На каждой тройке центров граней, прилегающих к каждой из 8 вершин куба, построим по правильному треугольнику (рис.7). Легко проверить, что все двугранные углы между гранями равны. Этот многогранник правильный. Он имеет восемь граней и называется *октаэдром*.

Несколько сложнее убедиться в существовании правильного многогранника, соответствующего символу $(3,5)$, т.е. многогранника с треугольными гранями, сходящимися по пять в каждой вершине. Возьмем три равных *золотых* прямоугольника, т.е. прямоугольника с соотношением сторон $\left(\sqrt{5}+1\right):2$. Расположим их во взаимно перпендикулярных плоскостях, как показано на рисунке 8. Пусть стороны золотых прямоугольников для определенности равны $\sqrt{5}+1$ и 2. Возьмем произвольную вершину A_1 одного из прямоугольников. Легко проверить, что существует в точности пять вершин этих прямоугольников, а именно вершины B_1, A_2, B_3, D_3, D_2 находящиеся от A_1 на одинаковом расстоянии 2. По теореме Пифагора легко установить, что треугольники $A_1B_1A_2$, $A_1A_2B_3$, $A_1B_3D_3$, $A_1D_3D_2$, $A_1D_2B_1$ правильные. Кроме того, нетрудно убедиться, что любые два смежных треугольника образуют равные двугранные углы. Точно такие правильные треугольники появляются во всех 12 вершинах прямоугольников, по пять в каждой. Таким образом, существует правильный многогранник, соответствующий символу $(3,5)$. Этот многогранник называется *икосаэдром*, что в переводе с греческого означает двадцатигранник (см. рис. 6). У икосаэдра 12 вершин.

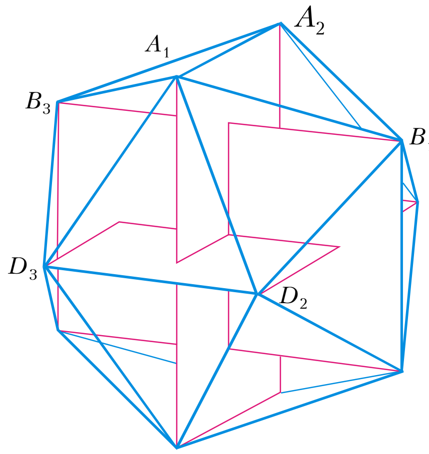


Рис.8

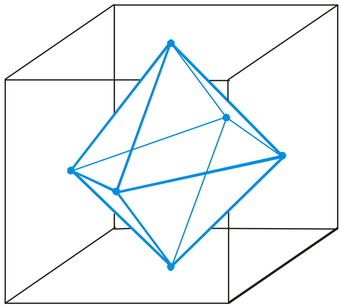


Рис.7

Чтобы построить правильный многогранник с символом $(5,3)$, возьмем в качестве вершин этого многогранника центры всех двадцати треугольных граней икосаэдра. Центры пяти треугольников, сходящихся в той или иной вершине икосаэдра, образуют вершины плоского правильного пятиугольника. Всего таких пятиугольников столько же, сколько вершин у икосаэдра – двенадцать. Эти правильные пятиугольники, сходящиеся по три в каждой вершине (в центре треугольной грани икосаэдра), образуют двенадцатигранник – *додекаэдр* (см. рис.6). Легко проверить, что все двугранные углы у этого додекаэдра равны. Поэтому этот многогранник является правильным.

Читатель мог заметить, что два правильных многогранника – октаэдр и додекаэдр – строились при помощи других многогранников – куба и икосаэдра. Причем каждая вершина, скажем, октаэдра соответствовала некоторой грани куба, в то время как грань октаэдра соответствовала некоторой вершине куба. Точно то же самое можно сказать и о паре многогранников икосаэдр–додекаэдр.

Два многогранника называются *дуальными*, если между множеством граней одного из них и множеством вершин другого существует взаимно однозначное соответствие, причем такое, что если две грани первого из них смежны по ребру, то соответствующие этим граням вершины второго многогранника соединяются ребром. Подчеркнем, что у пары дуальных многогранников число вершин одного равно числу граней другого, а ребер у них поровну.

В конце предыдущего параграфа мы рассматривали многогранники лишь с треугольными гранями, сходящимися в каждой вершине по шесть или пять. Дуальные к ним многогранники состоят лишь из пяти- и шестиугольников, причем в каждой вершине сходятся по три грани. Такие многогранники называются *фуллеренами*[4]. Изучение фуллеренов очень важно для приложений в химии, медицине, архитектуре. Теорема Грюнбаума в переводе на язык фуллеренов означает, что во всяком фуллерене имеется в точности двенадцать пятиугольников, а шестиугольников может быть какое угодно число, не меньшее двух.

Чрезвычайно важная задача – как перечислить всевозможные структуры фуллеренов с наперед заданным числом n шестиугольников и сколько их в зависимости от n – остается актуальной и по сей день.

[4] *Название происходит от имени знаменитого американского архитектора Р.Фуллера, который впервые начал применять такие многогранные формы, а также дуальные им для построения купольных сооружений.*