7. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B, K – произвольная точка на меньшей из двух дуг AB этой окружности. На прямой OB взята точка L такая, что прямые OA и KL параллельны. Пусть M – точка пересечения окружности ω, описанной около треугольника KLB, с прямой AK, отличная от K. Докажите, что прямая OM касается окружности ω.

С.Берлов, П.Кожевников

8. Саша написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат.

А.Голованов

10 класс

1. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \ldots + a_n)$. Докажите, что верны все равенства вида $f(A) = f(B)$, где A – сумма длин любых нескольких сторон многоугольника, B – сумма длин остальных его сторон.

Н.Агаханов

2. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность s_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD, причем вторая точка пересечения s_1 с диагональю AC лежит на отрезке AK. Окружность s_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD, причем вторая точка пересечения s_2 с диагональю AC лежит на отрезке KC. Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей s_1 и s_2, будут параллельны между собой.

Т.Емельянова

3. Опишите все способы покрасить каждое натуральное число в один из трех цветов так, что если числа a, b и c (не обязательно различные) удовлетворяют условию $2000(a+b) = c$, то все они либо одного цвета, либо трех разных цветов.

Ю.Лифшиц

4. Проведены три семейства параллельных прямых, по 10 прямых в каждом. Какое наибольшее число треугольников они могут вырезать из плоскости?

Ю.Лифшиц

5. a, b и c – целые числа, $c \neq b$. Известно, что квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ и $(c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$ имеют общий корень (не обязательно целый). Докажите, что $a + b + 2c$ делится на 3.

А.Храбров

6. Дан треугольник ABC. На прямой AC отмечена точка B_1 так, что $AB = AB_1$, при этом B_1 и C находятся по одну сторону от A. Через точки C, B_1 и основание биссектрисы угла A треугольника ABC проводится окружность ω, вторично пересекающая окружность, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что касательная, проведенная к ω в точке Q, параллельна AC.

Л.Емельянов

7. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем *ладейно связанным*, если из любой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связанное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.

И.Певзнер

8. На окружности расположена тысяча непересекающихся интервалов, и в каждом из них написаны два натуральных числа. Сумма чисел каждого интервала делится на произведение чисел интервала, соседнего слева. Каково наибольшее возможное значение наибольшего из написанных чисел?

В.Сендеров

11 класс

1. Найдите все простые числа p и q такие, что $p + q = (p-q)^3$.

Р.Женодаров

2. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет ровно три различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ – ровно семь различных корней?

Н.Агаханов, О.Подлипский

3. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC и прямая l касается окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD, DC и MN, касается прямой l.

Н.Седракян

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Дана последовательность $\{x_k\}$ такая, что $x_1 = 1$, $x_{n+1} = n \sin x_n + 1$. Докажите, что последовательность непериодична. (Последовательность называется периодической, если она имеет период, начиная с некоторого, не обязательно первого номера.)

А.Голованов

6. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из вершин некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из вершин скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней, также пересекаются.

Фольклор

7. На плоскости дано бесконечное множество точек S, при этом в любом квадрате 1×1 лежит конечное число точек из множества S. Докажите, что найдутся две разные точки A и B из S такие, что для любой другой точки X из S

$$|XA|, |XB| \geq 0{,}999|AB|.$$

Р.Карасёв

8. Докажите, что в любом множестве, состоящем из 117 попарно различных трехзначных чисел, можно выбрать 4 попарно непересекающихся подмножества, суммы чисел в которых равны.

Д.Храмцов, Г.Челноков

Заключительный этап

9 класс

1. Числа от 1 до 999999 разбиты на две группы: в первую отнесено каждое число, для которого ближайшим к нему квадратом является квадрат нечетного числа, во вторую – числа, для которых ближайшими являются квадраты четных чисел. В какой из групп сумма чисел больше?

Н.Агаханов

2. Два многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $Q(x) = x^2 + px + q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне I – неотрицательны. Докажите, что найдется такая точка x_0, что $P(x_0) < Q(x_0)$.

Н.Агаханов

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K таким образом, что середина отрезка AD равноудалена от точек K и C, а середина отрезка CD равноудалена от точек K и A. Точка N – середина отрезка BK. Докажите, что углы NAK и NCK равны.

С.Берлов

4. Дан 2000-угольник, никакие три диагонали которого не пересекаются в