Иррациональные уравнения

А.ЕГОРОВ, Ж.РАББОТ

Иррациональные уравнения довольно часто становятся «камнем преткновения» на вступительных экзаменах. О некоторых методах их решения мы и поговорим, причем в основном будем иметь дело с квадратными корнями (радикалами). Как правило, такая задача решается, если нам удается избавиться от радикалов и свести ее к «обычным» уравнениям, не содержащим корней.

Простейшие уравнения

Так мы будем называть уравнения вида

1) $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

и

2) $\sqrt{f(x)}=g(x)$.

Именно к ним сводится в итоге решение большинства уравнений, связанных с квадратными корнями. Избавиться от радикалов в простейших уравнениях можно, возведя их почленно в квадрат. Однако при этом могут появиться посторонние корни, так что надо еще позаботиться об их отсеве.

Уравнение первого типа равносильно каждой из двух систем

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0, \end{cases}$$

поскольку после возведения в квадрат получаем уравнение-следствие $f(x)=g(x)$. Мы должны, решив его, выяснить, принадлежат ли найденные корни области определения исходного уравнения, т.е. выполняется ли неравенство $f(x)\ge 0$ (или $g(x)\ge 0$). На практике из этих систем выбирают для решения ту, в которой неравенство проще.

Рассмотрим пример.

Пример 1. *Решите уравнение*

$$\sqrt{x^2-x-1}=\sqrt{2x^2-2}.$$

Решение. Находим корни уравнения $f(x)=g(x)$:

$$x^2+x-1=0,$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt5}{2},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt5}{2}.$$

Поскольку для корней нашего квадратного уравнения $x^2-1=-x$, неравенство

$$g(x)\ge 0 \Leftrightarrow x^2-1\ge 0$$

выполняется при $x_2<0$ и не выполняется при $x_1>0$.

Ответ: $\frac{-1-\sqrt5}{2}$.

Обратите внимание на то, что мы при отборе корней обошлись, по сути дела, без непосредственных вычислений.

Уравнение второго типа равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

Школьники довольно часто добавляют к этой системе неравенство $f(x)\ge 0$. Однако обычно этого делать не нужно (и даже опасно, особенно в задачах с параметром), поскольку условие $f(x)\ge 0$ автоматически выполняется для корней уравнения $f(x)=g^2(x)$, в правой части которого стоит неотрицательное выражение — квадрат функции $g(x)$.

Пример 2. *Решите уравнение*

$$\sqrt{3x^2-x-2}=x-1.$$

Решение. После возведения в квадрат получаем уравнение $2x^2+x-3=0$. Его корни $x_1=1$, $x_2=-3/2$. Условию $x\ge 1$ удовлетворяет лишь $x=1$.

Ответ: 1.

Пример 3. *Решите уравнение*

$$\sqrt{3x^2-2x-1}=2x+1.$$

Решение. После возведения в квадрат и упрощений получаем уравнение

$$x^2+6x+2=0$$

с корнями $x_{1,2}=-3\pm\sqrt7$. Условию

$$g(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1/2$$

удовлетворяет лишь корень «с плюсом». В этом можно убедиться, заметив, что

$$-3+\sqrt7>-3+\sqrt{6{,}25}=$$
$$=-3+2{,}5=-1/2.$$

Но можно поступить и так. Поскольку при $x=-1/2$ значение квадратного трехчлена отрицательное:

$$f(x)=x^2+6x+2=$$
$$=(-1/2)^2-3+2<0,$$

число $x=-1/2$ лежит между его корнями x_1 и x_2.

Такой прием иногда избавляет от необходимости проводить не очень сложные, но порой утомительные вычисления.

Ответ: $-3+\sqrt7$.

Упражнение 1. Решите уравнения

а) $\sqrt{3x-1}=\sqrt{x-2}$;

б) $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{2x^2-1}$;

в) $\sqrt{x^2-5x-14}=\sqrt{3x-2}$;

г) $\sqrt{x^2-x-6}=\sqrt{x-4}$;

д) $\sqrt{x+1}=x-1$;

е) $\sqrt{2x+1}=2x^2-x-1$;

ж) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$;

з) $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=3$.

Более сложные уравнения

Если в уравнении имеется несколько радикалов или же их нагромождение вроде $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$ и т.п., первоначальной целью является избавление от них, что достигается возведением в квадрат (может быть, неоднократным) с тем, чтобы в конце концов прийти к уравнениям, которые мы умеем решать.

Пример 4. *Решите уравнение*

$$\sqrt{8x+9}-\sqrt{7x-5}=2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{8x+9}=2+\sqrt{7x-5}$$

и возведем в квадрат. После упрощений получим простейшее уравнение

$$4\sqrt{7x-5}=x+10, \qquad (1)$$

или, после повторного возведения в