Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1786» или «Ф1793». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М1786 предлагалась на московском отборе на XXVII Всероссийскую математическую олимпиаду, задачи М1792–М1794 – на самой этой олимпиаде.

Задачи Ф1793, Ф1797 и Ф1801 предлагались в этом году на Московской физической олимпиаде, а задачи Ф1795 и Ф1798 – на XXXV Всероссийской физической олимпиаде .

Задачи М1786–М1795, Ф1793–Ф1802

М1786. На плоскости отмечено шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, причем все попарные расстояния между ними различны. Докажите, что среди треугольников с вершинами в этих точках найдутся два треугольника с общей стороной такой, что для одного эта сторона является наибольшей, а для другого – наименьшей.

С.Рукшин

М1787*. Пусть p и q – натуральные числа, большие 1. Известно, что q^3-1 делится на p, а $p-1$ делится на q. Докажите, что $p=q^{3/2}+1$ или $p=q^2+q+1$.

Н.Осипов

М1788. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, A', B', C' – точки ее касания со сторонами BC, CA, AB (рис.1). Прямые AA' и BB' пересекаются в точке P, AC и $A'C'$ – в точке M, BC и $B'C'$ – в точке N. Докажите, что прямые IP и MN перпендикулярны.

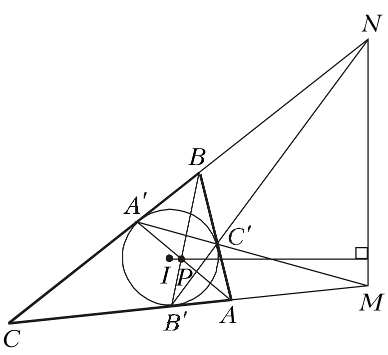

Рис.1

А.Заславский

М1789. а) Из ста гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 100 г выбирается набор в 50 гирек, общая масса которых равна общей массе оставшихся. При этом никакие две гирьки набора не различаются на 50 г. Докажите, что в наборе найдутся две гирьки, общая масса которых равна 101 г.

б) Из двухсот гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 200 г выделяется набор в 100 гирек, общая масса которых равна массе оставшихся. При этом никакие две гирьки набора не различаются на 100 г и не дают вместе 201 г. Докажите, что 50 минимальных гирек набора составляют вместе 2525 г.

В.Произволов

М1790. Имеются в некотором количестве равносторонние треугольники, у каждого из которых одна сторона желтая, другая красная, а третья синяя. Можно прикладывать треугольники друг к другу одноцветными сторонами или участками одноцветных сторон. Таким образом составлен большой равносторонний треугольник Δ.

Докажите, что суммарная длина участков границы треугольника Δ каждого из трех цветов одна и та же.

С.Волченков

М1791. а) На плоскости расположены 5 окружностей, любые четыре из которых имеют общую касательную. Обязательно ли все 5 окружностей имеют общую касательную?

б) На плоскости расположены n окружностей, любые 5 из которых имеют общую касательную. Докажите, что все n окружностей имеют общую касательную.

В.Произволов

М1792. В компании из $2n+1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

С.Берлов