цом? В этом случае в каждой вершине графа, к которой подходит хотя бы одно ребро, сходятся, как минимум, два ребра. По этой причине в графе G можно найти *простой замкнутый* реберный путь. *Замкнутый* – это путь, который возвращается туда, откуда он вышел, а *простой* путь, подобно окружности, не пересекает сам себя. В графе на рисунке 5 «нос» и «рот» образуют простой замкнутый контур. Опять же, подобно окружности, простой замкнутый путь разбивает сферу на две области. Это очевидное на первый взгляд утверждение доказывается очень непросто и известно в математике как теорема Жордана.

Почему в графе G, не содержащем ребер со свободным концом, имеются простые замкнутые реберные пути? Давайте отправимся в путь из произвольного ребра графа, переходя каждый раз от одного ребра через его концевую вершину к соседнему ребру. Так как в каждой вершине, в которую мы приходим, сходится не меньше двух ребер, то можно путешествовать по ребрам графа сколь угодно долго. Но вершин в графе конечное число. Поэтому рано или поздно наступит такой момент, когда мы впервые придем в вершину, скажем A, в которой были уже прежде. Тогда реберный путь w, пройденный от вершины A до первого возвращения в эту же вершину, будет очевидно простым и замкнутым. Удалим из пути w какое-нибудь ребро e. Число вершин не изменится: $B' = B$. Число ребер уменьшится на единицу: $P' = P - 1$. Так как по разные стороны от удаленного ребра e лежали разные области, то после удаления ребра они объединятся в одну область. Значит, число областей уменьшится на единицу: $\Gamma' = \Gamma - 1$. При этом число компонентов в графе не уменьшится. Действительно, концевые вершины удаленного ребра e можно соединить и в графе G'. Для этого нужно пройти от одной концевой вершины ребра e к другой по дополнительной части замкнутого пути w. Поэтому любые две вершины v и v', соединенные некоторым путем в графе G, можно соединить и в графе G', заменив при необходимости выкинутое ребро e на путь, соединяющий концевые вершины этого ребра.

Итак, и в случае 2) всегда можно найти ребро, при удалении которого сумма

$$B' - P' + \Gamma' - K' = B - (P - 1) + (\Gamma - 1) - K = B - P + \Gamma - K$$

также не меняется.

Таким образом, мы из любого графа можем удалить ребро, не меняя при этом суммы $B - P + \Gamma - K$. В результате последовательного удаления всех ребер мы приходим к графу «звездное небо», для которого обобщенная формула, как было проверено выше, верна. Следовательно, обобщенная формула верна и для исходного графа G.

Обобщенная теорема Эйлера доказана.

Следствия из теоремы Эйлера

Теорема Эйлера играет огромную роль в математике. С ее помощью было доказано огромное количество теорем. Находясь в центре постоянного внимания со стороны математиков, теорема Эйлера получила далеко идущие обобщения. Более того, эта теорема открыла новую главу в математике, которая называется *топологией*.

Во время работы над своей теоремой Эйлер вывел из нее несколько утверждений, относящихся к выпуклым многогранникам:

1) $P + 6 \le 3B$ и $P + 6 \le 3\Gamma$;

2) $\Gamma + 4 \le 2B$ и $B + 4 \le 2\Gamma$;

3) у всякого многогранника есть хотя бы одна треугольная, четырехугольная или пятиугольная грань, а также хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол;

4) сумма плоских углов всех граней многогранника равна $2\pi B - 4\pi$.

Мы докажем первое неравенство и последнее утверждение, оставив остальное для самостоятельной работы.

Докажем неравенство $P + 6 \le 3B$. Перепишем соотношение Эйлера дважды, один раз в виде

$$P + 2 = B + \Gamma$$

и другой раз в виде

$$4 = 2B - 2P + 2\Gamma.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$P + 6 = 3B + 3\Gamma - 2P.$$

Так как у каждой грани многогранника не менее трех сторон, то $3\Gamma \le 2P$. Отсюда сразу получаем $P + 6 \le 3B$.

Докажем утверждение 4). Обозначим через Γ_i число i-угольных граней в многограннике M. Ясно, что

$$\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \ldots \qquad (1)$$

Ясно также, что каждая i-угольная грань содержит i ребер многогранника. С другой стороны, каждое ребро многогранника принадлежит в точности двум граням. Поэтому в сумме $3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \ldots$ каждое ребро многогранника подсчитано, причем подсчитано дважды. Отсюда имеем

$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \ldots \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь сумму S плоских углов многогранника:

$$S = \Gamma_3 \cdot \pi + \Gamma_4 \cdot 2\pi + \ldots$$
$$\ldots + \Gamma_i \cdot (i-2)\pi + \ldots \qquad (3)$$

С учетом соотношений (1) и (2) и теоремы Эйлера соотношение (3) можно переписать так:

$$S = \Gamma_3(3-2)\pi + \Gamma_4(4-2)\pi + \ldots$$
$$\ldots + \Gamma_i(i-2)\pi + \ldots = 2P\pi - 2\Gamma\pi =$$
$$= 2B\pi - 4\pi.$$

Утверждение 4) доказано.

Упражнения

2. Докажите, что для выпуклого многогранника а) $P + 6 \le 3\Gamma$; б) $\Gamma + 4 \le 2B$; в) $B + 4 \le 2\Gamma$.

3. Докажите, что у выпуклого многогранника есть либо по меньшей мере одна треугольная грань, либо трехгранный угол при вершине.

Утверждение 4) по существу эквивалентно важной теореме о многогранниках, доказанной французским математиком Рене Декартом (1596–1650).[2]

Возьмем произвольную вершину v многогранника и соответствующий многогранный угол с вершиной в v. Пусть $\alpha(v)$ – сумма всех плоских углов этого пространственного угла. Легко показать, что у выпуклого многогранного угла сумма плоских углов строго меньше 2π. Разность $\omega(v) = 2\pi - \alpha(v)$ называется *кривизной* вершины v. Таким образом, кривизна вершины выпуклого многогранника строго положительна. Например, кривизна вершины куба

[2] *Создав координатный метод, чтобы «поверить алгеброй» геометрию, и тем самым, по мнению некоторых весьма уважаемых математиков, «звуки (геометрии) умертвив», Декарт в то же время был первым геометром, который после древних греков занимался общей теорией многогранников.*