«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Докажем, что профессору Мумбуму Плюмбуму не удастся составить из 8 различных цифр число, которое делилось бы на каждую из этих цифр. Очевидно, среди цифр не должно быть цифры 0. Кроме того, среди них обязательно должны присутствовать четные цифры, поэтому искомое восьмизначное число должно быть четным. В таком случае оно не должно делиться на цифру 5 (иначе это число должно было бы оканчиваться на цифру 0). Итак, в искомое число могут входить только цифры 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, и, следовательно, оно должно делиться на 9. Но сумма выписанных цифр не делится на 9.

Пример семизначного числа, делящегося на любую из его цифр: 1289736.

2. Если квадрат имеет нечетную сторону, то в нем клеток одного цвета на 1 больше количества клеток другого цвета. Пусть отмечено N квадратов с центральной белой клеткой (назовем их центрально-белыми) и M квадратов с центральной черной клеткой (назовем их центрально-черными). У центрально-белых квадратов суммарное количество белых клеток на N больше суммарного количества черных клеток; у центрально-черных квадратов суммарное количество черных клеток на M больше суммарного количества белых клеток. Поскольку изначально количества черных и белых клеток равны, то $M = N$. Таким образом, белых и черных клеток отмечено поровну.

3. Очевидно, при маленьком радиусе колеса оно будет катиться по бордюру, и длина следа будет не нулевой. Найдем наибольшее значение радиуса колеса R, при котором еще возможно касание колеса в вершине бордюра – правильного треугольника с длиной стороны a (рис.1).

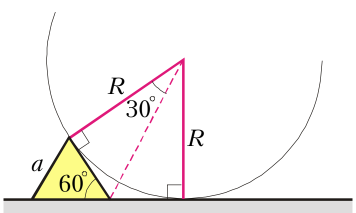

Рис. 1

Из соотношения $\frac{a}{R} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ получаем $R = a\sqrt{3}$. Колесо будет поворачиваться вокруг вершины бордюра, оставляя нулевую длину следа, если только его радиус превышает величину $a\sqrt{3}$. Для значения a = 20 см имеем $a\sqrt{3} > 20 \cdot 1{,}7 = 34$ см, поэтому колесо с радиусом 30 см обязательно оставит на бордюре след.

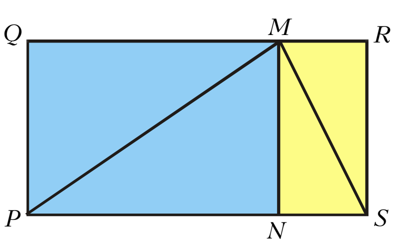

Рис. 2

4. Воспользуемся следующим вспомогательным утверждением: если на стороне QR прямоугольника $PQRS$ выбрана точка M, то площадь треугольника PMS равна половине площади прямоугольника $PQRS$. Для доказательства достаточно опустить высоту MN и рассмотреть площади треугольников PQM; PMN и MNS; MRS (рис.2).

Для доказательства основного утверждения задачи заметим, что площадь четырехугольника $CBDA$ (рис.3), с одной стороны, равна половине площади красного прямоугольника, а с другой стороны – половине площади синего прямоугольника.

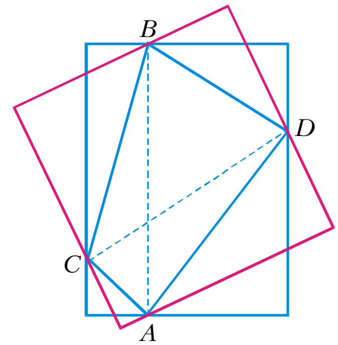

Рис. 3

5. Может показаться, что данных недостаточно – ведь первый собеседник не договорил, какой именно год он имеет в виду. И тем не менее задача решается: ведь он успел сказать главное – что получается *какой-то год*, а следовательно – *целое число.* Таким образом, если год его рождения обозначить через x, то из условия следует, что $\frac{(x+43)(x+45)}{x}$ – целое. Но

$$\frac{(x+43)(x+45)}{x} = \frac{x^2 + 88x + 1935}{x} = x + 88 + \frac{1935}{x},$$

т.е. 1935 делится на x. Отсюда x = 1935 (меньшие значения, очевидно, не подходят).

Таким образом, первый собеседник родился в 1935 году. Тогда 43 года ему исполнилось в 1978 году, 45 – в 1980 году, а тот год, о котором он не успел ничего сказать – это $1978 \times 1980/1935 = 2024$. Правда, этот год еще не наступил, но в условии это и не требуется. Он, например, мог сказать так: «...когда наступит сорокалетие моего внука» или еще что-нибудь.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Поскольку из двух наклонных больше та, у которой проекция больше, то из неравенств условия задачи выводятся такие следствия:

$$DP \ge PA \Rightarrow OD \ge OA;$$

$$AQ \ge QB \Rightarrow OA \ge OB;$$

$$BR \ge RC \Rightarrow OB \ge OC;$$

$$CS \ge SD \Rightarrow OC \ge OD.$$

Отсюда

$$OD \ge OA \ge OB \ge OC \ge OD,$$

или

$$OD = OA = OB = OC = OD.$$

Значит, точка O – центр описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности.

17. Такого натурального числа не существует. Для любого натурального n член этой последовательности $\left(n^2 + 3n + 3\right)n + 1$ является кубом числа n + 1.

18. Пусть каждому медвежонку в конечном итоге досталось m граммов сыра. Так как после каждого откусывания масса куска уменьшается в 2 раза, то лиса не могла от каждого куска откусить одинаковое число раз (по 5), так как в этом случае начальные массы кусков также были бы равны, что противоречит условию. Поэтому пусть от первого куска лиса откусила n раз ($0 \le n \le 4$), а от второго – остальные 10 – n раз. Тогда первоначальные массы кусков были равны $m \cdot 2^n$ и $m \cdot 2^{10-n}$.

Допустим, медвежата правы, и уравнять массу частей можно за k откусываний, где $1 \le k \le 3$. Так как $n \le 4$, то масса первого куска меньше, чем второго, и для уравнивания надо от второго куска откусить больше раз, чем от первого, т.е. больше $k/2$ раз. Итак, пусть от второго куска при уравнивании надо откусить p раз, причем $k/2 < p \le k \le 3$. Тогда от первого куска следует откусить $k - p$ раз. В результате массы кусков станут равны $m \cdot 2^{n-(k-p)}$ и $m \cdot 2^{10-n-p}$, а поскольку они сравняются между собой, то $n - (k - p) = 10 - n - p$, откуда

$$k = 2(n + p - 5),$$

т.е. k – четное число. Но $1 \le k \le 3$, следовательно, $k = 2$. Далее, так как $k/2 < p \le k$, то $p = 2$. Поэтому

$$2 = 2(n + 2 - 5), \text{ и } n = 4.$$

Таким образом, первоначальные массы частей равны $m \cdot 2^4 = 16m$ и $m \cdot 2^{10-4} = 64m$. В сумме это составляет 1 кг, или 1000 г, поэтому $16m + 64m = 1000$, откуда $m = 12{,}5$ г. Окончательная же масса обеих частей равна $12{,}5 \times 2 = 25$ г, что противоречит условию, согласно которому на долю медвежат досталось меньше 20 г сыра.

Следовательно, медвежата *неправы*.

Правомерен вопрос: а возможно ли вообще, чтобы после десятого откусывания медвежатам досталось меньше 20 г сыра? Оказывается, да. Простейший пример: лиса разламывает сыр на части, массы которых соотносятся как 1:1024, а затем 10 раз откусывает от большей части. В результате массы кусков уравниваются, но в каждом из них будет меньше грамма! Возможны и другие, менее грабительские, варианты.

19. Пусть числа записаны на карточках, выложенных в ряд. Будем менять карточки и увеличивать вдвое числа на них. Две карточки, раз поменявшись местами, обратно поменяться не могут. Предположим противное и выберем пару (A, B), первой поменявшуюся обратно. Ясно, что в промежутке между прямым и обратным обменами была еще хотя бы одна операция с A или B, иначе левое число так и осталось бы меньше правого. Однако карточка, поменявшись с A, попадет между A и B. Снова с A она не менялась – иначе обратный обмен A и B не первый. Остаться между A и B она тоже не может – тогда A и B не смогут поменяться. Значит, она поменялась с B. Но тогда сколько раз в промежутке поменялась A, столько раз поменялась и B, значит, числа на A и B увеличились в одинаковое количество раз, правое осталось больше левого, и они таки не могли поменяться.

20. Разделим клетки доски на 16 крайних, одну центральную и 8 средних. На средние клетки было сделано 8 ходов, один из них из центра, поэтому не более 7 – с края. Значит, с края на край сделано не менее 9 ходов. Предположим, с края на край нет ходов по диагонали, тогда по принципу Дирихле вдоль одной из сторон квадрата сделано не менее 3 ходов с края на край. Для них есть 3 начальных и 3 конечных клетки, но на одном краю доски только 5 клеток, поэтому какая-то начальная совпадет с конечной, т.е. найдутся два последовательных хода в одном направлении, чего быть не может. Итак, имеется ход D с края на край по диагонали. Тогда он отсекает угол, и ход из этого угла (или в этот угол) пересекает D. Таким образом, ломаная должна быть самопересекающейся.

Параллельная проекция

1. Пусть параллельные прямые a и b проектируются параллельно прямой l на плоскость π. Тогда плоскости, проходящие через a и b и параллельные l, параллельны между собой и, значит, пересекают π по параллельным прямым. Следовательно, параллельной проекцией параллелограмма будет параллелограмм, и равные параллельные отрезки проецируются в равные. Для завершения доказательства достаточно заметить, что по теореме Фалеса отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, равно отношению длин их проекций.

2. Противоположные стороны двух параллелограммов, изображенных на рисунке 2 статьи, лежат на одних прямых. Их проекции обладают тем же свойством и, значит, равновелики. Пусть теперь даны два равновеликих параллелограмма $ABCD$ и $KLMN$. Заменим $ABCD$ равновеликим параллелограммом $ABC'D'$, сторона BC' которого параллельна KL, а $KLMN$ — равновеликим параллелограммом $KLM'N'$, сторона LM' которого параллельна AB. Поскольку параллельная проекция сохраняет отношения параллельных отрезков, проекции этих, а значит, и исходных параллелограммов равновелики.

3. Возьмем равнобедренный треугольник ABC с вершиной C, лежащей на линии пересечения исходной плоскости и плоскости проекции, и основанием AB, параллельным этой линии (см. рис. 3 статьи). Его проекцией будет также равнобедренный треугольник $CA'B'$, причем $A'B' = AB$, а высота $CD' = CD\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями. Следовательно, $\operatorname{tg}\angle A'CD' = \operatorname{tg}\angle ACD/\cos\varphi$. Пусть $\operatorname{tg}\angle ACD = \varepsilon, \cos\varphi = \varepsilon^2$, где ε достаточно мало. Тогда близкий к нулю угол ACB проецируется в близкий к π угол $A'CB'$.

4. Пусть O — вершина трехгранного угла. На ребре, двугранный угол при котором равен γ, отложим отрезок $OC = 1$, проведем через C плоскость, перпендикулярную OC, и найдем точки A и B ее пересечения с другими ребрами (рис.4). Получаем

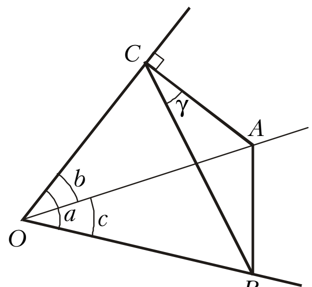

Рис. 4

$$CB = \operatorname{tg} a,\ CA = \operatorname{tg} b,\ OB = 1/\cos a,\ OA = 1/\cos b,$$

$$AB^2 = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - 2\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \cos\gamma,$$

$$\cos c = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma.$$

5. Докажем сначала, что если прямой угол ортогонально проецируется в прямой, то одна из его сторон параллельна плоскости проекции.

Предположим, что это не так. Тогда можно считать, что проекцией прямого угла ACB является прямой угол ADB. Но в этом случае все углы при вершине D пирамиды $ABCD$ прямые, т.е. $AC > AD$, $BC > BD$, $AC^2 + BC^2 > AD^2 + BD^2$ — противоречие.

Пусть теперь диагонали четырехугольника $A'B'C'D'$ перпендикулярны. Так как эти диагонали являются проекциями перпендикулярных друг другу противоположных ребер тетраэдра, одно из этих ребер, например BD, параллельно плоскости проекции. Тогда плоскость симметрии тетраэдра, проходящая через AC и середину BD, перпендикулярна площади проекции, и $A'B'C'D'$ симметричен относительно прямой $A'C'$, в которую проецируется эта плоскость. Отсюда сразу вытекает требуемое утверждение.

Ортоцентрический треугольник

2. $l|\cos\gamma|$.

3. а) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$; в) от 0 до 1.

Указание. $c = 2R\sin\gamma$, т.е. $A_1B_1 = 2R\sin\gamma|\cos\gamma|$.

4. Определите углы, образуемые прямыми A_1B_1 и OC со стороной AC.

5. Rp_1. *Указание*. В четырехугольниках OA_1CB_1, OA_1BC_1, OB_1AC_1 диагонали перпендикулярны, а сумма их площадей равна площади исходного треугольника.

6. а) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$;

г) $\frac{\pi - \alpha_1}{2}, \frac{\pi - \beta_1}{2}, \frac{\pi - \gamma_1}{2}$.

7. а) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}$;

в) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}; \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$.

8. $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}; \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

9. Четыре.

10. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}$;
$\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}$.

11. Пусть сначала ABC – остроугольный треугольник. Окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, гомотетична с центром H и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ описанной окружности треугольника ABC и, следовательно, проходит через середины отрезков CH, BH и AH. Далее, точка A – ортоцентр треугольника CHB. Мы доказали, что точки, симметричные точке A относительно сторон BC, BH и CH, лежат на окружности BHC (рис. 5). Но эта окружность при гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и с центром в точке A переходит в окружность, описанную около треугольника $A_1B_1C_1$ и, следовательно, проходит через середины сторон AC и AB. Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи. Обратите внимание на то, что отрезки AB, AC и BC рассматриваются нами то как стороны треугольника ABC, то как отрезки высот треугольников AHB, AHC, BHC.

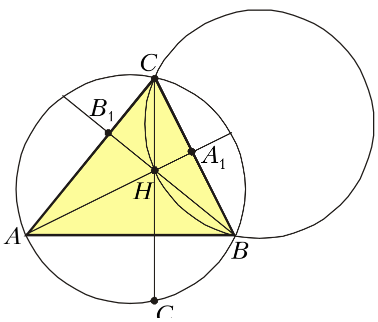

Рис. 5

Разновески

1. Нужно удостовериться в том, что треугольник с длиной основания a_i, где a_i –любое число из указанного набора, существует. Пусть $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Тогда $a_n \le \sum_{i=1}^{n-1} a_i - a_j$, $j \ne n$.
Значит, $a_n < a_1 + \ldots + a_{n-1}$, и, следовательно, каждый отрезок длины a_i меньше суммы длин всех остальных отрезков.

3. Предположим, массы гирек в примечательном наборе выражаются числами a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, причем $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Если убрать a_1, то выполняется только одно равенство $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. В самом деле, неравенства $a_2 + a_3 < a_4 + a_5$, $a_2 + a_4 < a_3 + a_5$ и $a_2 + a_3 + a_4 > a_5$ очевидны (если $a_2 + a_3 + a_4 \le a_5$, то $a_1 + a_2 + a_3 < a_5$, и гирьки a_1, a_2, a_3, a_5 нельзя разбить на две группы равной массы). Рассуждая аналогично (заменой всюду a_1 на a_2), убеждаемся в том, что если убрать a_2, то возможно либо равенство $a_1 + a_5 = a_3 + a_4$, либо равенство $a_1 + a_3 + a_4 = a_5$. Из совокупности равенств

$$a_2 + a_5 = a_3 + a_4,$$
$$a_1 + a_5 = a_3 + a_4$$

находим $a_1 = a_2$, а из совокупности равенств

$$a_2 + a_5 = a_3 + a_4,$$
$$a_5 = a_1 + a_3 + a_4$$

находим $a_1 = -a_2$, чего не может быть. Значит, удовлетворяющего условию задачи набора из пяти гирек с попарно различными массами не существует.

4. С точностью до произвольного множителя $m > 0$ решение задачи имеет один из видов: {1,1,1,1,1}, {1,1,1,3,3}, {1, 1, 1, 1, 3}, {1, 1, 3, 3, 5}.

Магнитные явления

1. $B = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi^2 r^2 \sqrt{\pi\varepsilon_0 rm}} \approx 4$ Тл.

2. $I = \frac{mg}{\sqrt{2}aB}$.

3. Внутри металла $B = \mu_0 q\omega/(2\pi) = 2 \cdot 10^{-11}$ Тл, а в полости цилиндра и во внешнем пространстве магнитное поле отсутствует.

4. $l = \frac{mv_0}{\sqrt{\alpha^2 + (qB)^2}}$.

LXIV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. $AX = 29$, $УX = 69$ или, наоборот, $AX = 69$, $УX = 29$. Поскольку $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, число 2001 можно представить в виде произведения двузначных чисел лишь следующими способами: $69 \cdot 29$ или $23 \cdot 87$.

2. Если оптовая цена ручки x рублей, то $5 - x = 10 - 3x$, откуда $x = 2{,}5$, т.е. 2 рубля 50 копеек.

3. 20 пакетиков.

4. Если рядом стоят числа a и b, то следующим стоит число b/a, за ним $1/a$, потом $1/b$ и, наконец, a/b. Эти шесть чисел удовлетворяют условию задачи. Конечно, при неудачном выборе чисел a и b какие-то из указанных чисел совпадут, но нас это не остановит: для решения задачи достаточно предъявить один пример. Например, взять $a = 2$, $b = 3$.

5. В Хемуля, Вифслу и Тофслу попали по одному разу. *Решение*. Если в Вифслу, Тофслу и Хемуля попали x, y и z снежков соответственно, то всего было брошено $13 + x + y + z$ снежков. С другой стороны, Вифсла бросил $6x$, Хемуль – $5y$, а Тофсла – $(4z + 1)$ снежков (вместе с первым снежком). Получаем уравнение

$$6x + 5y + 4z + 1 = 13 + x + y + z,$$

откуда $5x + 4y + 3z = 12$. Так как x, y, z – целые неотрицательные числа, то $(x; y; z) = (1;1;1)$, $(0;3;0)$ и $(0;0;4)$. Но поскольку в самого себя кидать снежки нельзя, то среди чисел x, y, z не может быть двух нулей. Поэтому возможен только первый случай.

1			20			13	
	2		21		12		
		3	22	11			
14	15	16	4	17	18	19	27
		10	23	5			
	9		24		6		
8			25			7	
			26				28

Рис. 6

6. См. рис.6.

7 класс

1. Конечно, это опечатка. Любая степень числа, оканчивающегося цифрой 1, тоже оканчивается цифрой 1. Поэтому разность $23021^{377} - 1$ оканчивается на 0 и, следовательно, не является простым числом.

2. Да, могло, если он один раз попал и три раза промахнулся. Решение проще всего найти, если разложить 8019 на множители: $8019 = 9^3 \cdot 11$. После удачного выстрела количество денег умножается на 1,1, а после неудачного – на 0,9, и

$$100 \cdot 1{,}1 \cdot (0{,}9)^3 = 80{,}19.$$

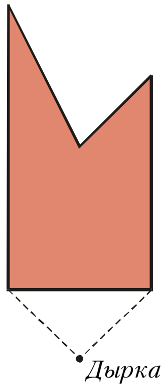

Рис. 7

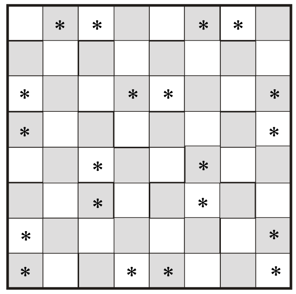

Рис. 8

3. Да, могло; например, если в исходном проекте было 5 подъездов, 4 этажа и на каждом этаже по одной квартире: $5\cdot 4 = 20,\ 3\cdot 7 = 21,\ 1\cdot 10 = 10$.

4. На рисунке 7 закрашено множество точек, в которые можно вбить гвоздь.

5. Пример приведен на рисунке 8.

Задачи для старших классов

8 класс

1. Это клетка, расположенная в строке 51 и столбце 50. Сначала будет закрашен наружный слой клеток, после чего останется прямоугольник 98×198 клеток. Этот прямоугольник также закрашивается по спирали, и т.д. После окраски 49-го слоя останется прямоугольник, расположенный в строках 50–51 и столбцах 50–151. Последней будет закрашена его нижняя левая клетка.

2. Да. Можно, например, ставить точки на окружности через равные достаточно малые интервалы.

3. 25. Напишем слова в столбик. После всех замен буквы в каждом столбце должны стать одинаковыми. Число замен будет наименьшим, если в каждом столбце сохранить наиболее частую букву. Наименьшее число замен равно 4 + 4 + 5 + 4 + + 4 + 4 = 25. (В результате могут получиться и осмысленные слова, например ЗЕЛЕНЬ, КАПЕЛЬ или КАФЕЛЬ.)

5, 6. Расположим двузначные числа в клетках прямоугольника, откладывая по горизонтали единицы, по вертикали – десятки. Каждой попытке Гриши соответствует крестик из пяти клеток, в центре которого – названное им число (если оно содержит цифру 0 или 9, то часть крестика выходит за края прямоугольника). Покрытие прямоугольника 22 крестиками легко найти, если заметить, что крестиками можно выложить плоскость без перекрытий (правда, придется добавить несколько крестиков по краям прямоугольника). Например, можно назвать числа 11, 13, 17, 25, 29, 30, 32, 37, 44, 49, 51, 56, 63, 68, 70, 75, 82, 87, 89, 90, 94, 97 (рис.9).

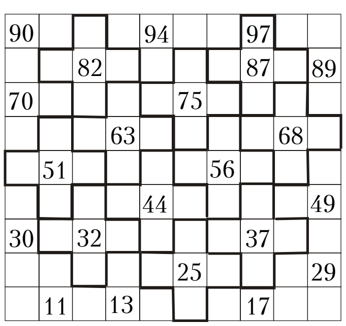

Рис. 9

В задаче 6 суммарная площадь крестиков равна $18\times 5 = 90$, т.е. площади прямоугольника. Но, покрывая угловую клетку, мы выйдем за пределы прямоугольника, и эта потеря помешает покрыть весь прямоугольник.

9 класс

1. Да. Расставим футболистов на прямой так, чтобы расстояние между первым и вторым было 2 м, между вторым и третьим – 3 м, между третьим и четвертым – 1 м.

2. Да. Допустим, что в каждом регионе все получают одинаковую зарплату и есть регион, в котором живут те самые 10% работников, которые получают 90% всей зарплаты.

3. Перпендикуляры к сторонам угла, восставленные в точках B и C, пересекаются в точке M', диаметрально противоположной M. Из равенства углов падения и отражения получаем, что M' – центр вписанной, а M – вневписанной окружности треугольника ABC. Поэтому диаметр MM' (включающий точку O) лежит на биссектрисе угла BAC.

Дополнение. Покажите, что O лежит на описанной окружности ΔABC.

4. Нет. Если в некоторый момент количество камней в каждой куче делится на некоторое нечетное число, то так будет и дальше. После первого хода можно получить три варианта размещения камней: 100 и 5 (общий делитель 5), 56 и 49 (делитель 7), 51 и 54 (делитель 3).

5. Такое число существует для любого k: $N_k = 9k\cdot\left(10^k - 1\right)$. Пусть $9k = \overline{s_1\ldots s_t 0\ldots 0}$ ($s_t \ne 0$, нулей на конце может и не быть). При любом k имеем $9k < 10^k$. Поскольку $N_k = 9k\cdot 10^k - 9k$, то сумма цифр числа N_k равна

$$s_1 + \ldots + s_t - 1 + 9 + \ldots + 9 + (9+1) - s_1 - \ldots - s_t = 9k$$

(в левой части k девяток).

6. а), б) Нет. Обозначим сумму очков участника A через S_A, а его коэффициент силы через F_A. Сумма $\Sigma_A S_A F_A$ равна сумме чисел вида $\pm S_A S_B$, где шахматисты A и B сыграли не вничью. Каждое такое слагаемое входит один раз со знаком «+» и один раз со знаком «–». Поэтому вся сумма равна 0, и коэффициенты силы не могут все одновременно быть положительными или отрицательными.

10 класс

1. Да. Например, x^2, $(x-1)^2$ и $(x-2)^2$.

3. Многочлены задачи получаются из нечетных многочленов $f(t)$ (для которых $f(-t) = -f(t)$) по формуле $P(x) = f(x - 1/2) + 1/2$. Например, при $f(t) = t^{2001}$ получаем $P(x) = (x - 1/2)^{2001} + 1/2$.

4. Пусть H_1, H_2, H_3, H – ортоцентры треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B, ABC соответственно, M_1, M_2, M_3 – середины H_BH_C, H_CH_A, H_AH_B. Поскольку $H_CH_2 \| HH_A$, $H_AH_2 \| HH_C$, то точка H_2 симметрична H относительно середины отрезка H_AH_C. Такие же рассуждения справедливы для H_1 и H_3. Так как M_1M_2 – общая средняя линия треугольников $H_AH_BH_C$ и H_1H_2H, то $H_AH_B = H_1H_2$. Аналогично, $H_BH_C = H_2H_3$, $H_AH_C = H_1H_3$, поэтому треугольники $H_1H_2H_3$ и $H_AH_BH_C$ равны.

5. Не могут. Назовем расположение фишек одноцветным или разноцветным в зависимости от того, стоят ли они на клетках одинакового или разного цвета. При перемещениях фишек одноцветные и разноцветные расположения чередуются, поэтому их должно быть поровну. Но количество разноцветных расположений равно $2\cdot 32^2$, а одноцветных – $2\cdot 32\cdot 31$, поскольку две фишки не могут стоять на одной клетке.

6. Да (см. рис.10). Пусть на кольце последовательно расположены точки A_1, B_2, A_3, B_1, A_2, B_3, причем от точек A_1, A_2, A_3 отходят «ветки» с k городами. Если первая армия первым ходом занимает точку на «ветке» длины k, то вторая

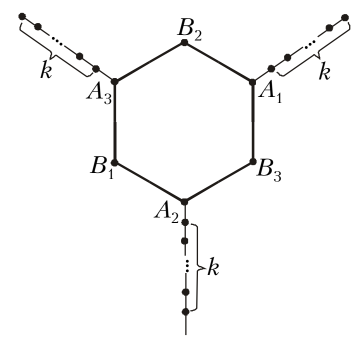

Рис. 10

должна занять соответствующую точку A_i; если первая занимает A_i, то вторая – B_i; если первая выбирает B_i, то вторая – одну из точек A_j ($j \neq i$). Дальнейшие действия очевидны. Так как в конце игры вторая армия занимает хотя бы две точки A_i, то первая занимает не более $k + 3$ точек. Поэтому доля городов, захваченных второй армией, не менее $(2k+3)/(3k+6) > 1/2$. В условии задачи вместо $1/2$ можно взять любое число $a < 2/3$ (тогда k нужно брать достаточно большим).

11 класс

1. Да. Например, $(x-3)^2 - 1$, $x^2 - 1$ и $(x+3)^2 - 1$.

2. Да. Пусть q – знаменатель прогрессии. Тогда q^9 и q^{29} – положительные рациональные числа. Это верно и для $q^2 = q^{29-9\cdot 3}$ и $q = q^{9-2\cdot 4}$. Пусть $q = m/n$, где m, n – взаимно простые натуральные числа. Число $a_{30} = a_1 m^{29}/n^{29}$ натуральное, поэтому a_1 делится на n^{29} и тем более на n^{19}. Значит, $a_{20} = a_1 m^{19}/n^{19}$ – число натуральное.

3. Точки I, I' лежат на биссектрисе $\angle ACB$. Опустив из них перпендикуляры IK, $I'K'$ на AC, получаем:

$$\frac{CI}{CI'} = \frac{IK}{I'K'} = \frac{IL}{I'L'}.$$

Спроектируем CI' на AB:

$$\frac{LH}{L'H} = \frac{IL}{I'L'}.$$

Пусть F – точка пересечения IL' и $I'L$, а G – ее проекция на AB. Тогда

$$\frac{GL}{GL'} = \frac{FI}{FI'} = \frac{IL}{I'L'} = \frac{LH}{L'H'},$$

откуда $G = H$, что и требовалось.

Дополнение. Докажите, что $CF = FH$.

4. Предположим, такой многочлен $Q(x)$ существует. Если его свободный член (равный $Q(0)$) делится на простое число p, то и $Q(p)$ делится на p. При этом $Q(p) \geq p^2 > p$ и потому является составным. Значит, $Q(0) = 1$. Но многочлен $Q(Q(x))$ обладает всеми свойствами из условия задачи и при этом $Q(Q(0)) = Q(1) > 1$, что противоречит предыдущему.

5. (По работе И.Межирова.) Опишем построение для произвольного количества многогранников N. Пусть правильный N-угольник с центром в начале координат лежит в горизонтальной плоскости и имеет вершины $A_1, \ldots, A_N$ (по часовой стрелке), а точки $B_1, \ldots, B_N$ находятся над ними на высоте 1. Многогранник с номером $k = 1, \ldots, N$ будет представлять собой пирамиду с вершиной B_k, основание которой горизонтально и находится на высоте меньше 1.

Возьмем горизонтальный треугольник с вершиной A_1 и соединим его вершины с B_1, получив первую пирамиду. Пусть k пирамид построены. Если проведена горизонтальная плоскость P на высоте немного меньше чем 1, то сечения пирамид целиком находятся вблизи $B_1, \ldots, B_k$. Пусть C – проекция B_{k+1} на эту плоскость. Проведем из C луч, пересекающий k-е сечение, и будем вращать его в направлении $(k-1)$-го сечения (против часовой стрелки). В какой-то момент он уже не пересекает внутренность k-го сечения, но еще содержит некоторую его граничную точку D_k. Продолжение луча за точку D_k вращаем против часовой стрелки, оно пересечет $(k-1)$-е сечение, затем коснется его и даст точку D_{k-1}. Продолжая аналогично, получим выпуклый многоугольник $D_1 \ldots D_k C$, касающийся сечений построенных пирамид (при $k = 1$, т.е. при построении второй пирамиды, нужно добавить еще одну вершину).

Соединив вершины многоугольника с B_{k+1}, получим $(k+1)$-ю пирамиду. Если ее пересекает горизонтальная плоскость Q, то сечения пирамид плоскостью Q проектируются на части их сечений плоскостью P (из-за наличия вертикального ребра у каждой пирамиды). Поэтому они не имеют общих внутренних точек, и никакие три не соприкасаются в одной точке. Значит, наши пирамиды – искомые многогранники.

6. а) Состояние описанной системы определяется количеством шариков в каждой коробочке и указанием коробочки, из которой нужно взять шарики. Из каждого состояния можно перейти за один шаг в однозначно определенное состояние. Предшествующее также восстанавливается однозначно: начиная с выделенной коробочки и идя против часовой стрелки, нужно брать по шарику из каждой непустой коробочки. Встретив пустую (может быть, после нескольких кругов), положим в нее собранные шарики и объявим отмеченной.

Начав с заданного состояния, будем выполнять операцию из условия задачи. Возможных состояний конечное число, и какое-то из них повторится. Значит, повторилось и предшествующее состояние, и т.д. вплоть до исходного.

б) Теперь состояние системы определяется лишь тем, как разложены шарики по коробочкам. Пусть из состояния X_1 можно перейти за один шаг в X_2 и т.д. вплоть до X_n. Если затем двигаться по правилу пункта а), то через сколько-то шагов придем в X_{n-1}. Далее можно аналогично перейти в X_{n-2} и т.д. вплоть до X_1. Таким образом, если существует путь из одного состояния в другое, то существует путь и обратно.

Осталось найти конкретное состояние X, в которое можно перейти из любого состояния Y (тогда можно перейти из X в произвольное состояние Z, а тем самым и из Y в Z). Отметим некоторую коробочку M. Если каждый раз брать шарики из непустой коробочки, ближайшей к M при движении против часовой стрелки, то либо число шариков в M увеличится, либо ближайшая непустая коробочка станет еще ближе. Процесс не может продолжаться бесконечно, и потому все шарики соберутся в M. Это и есть состояние X.

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Число конфигураций конечно. Если одна из них имеет более одного прообраза, то какая-то другая не имеет прообразов. Но «пустая» конфигурация (когда фишек на листе нет) получается из любой конфигурации, в которой имеется только одна или две фишки.

2. Допустим, утверждение задачи неверно. Найдутся две вершины квадрата $ABCD$, которые принадлежат одной и той же части. Если эти вершины – противоположные, то диаметр части не меньше $\sqrt{2}$. Если это соседние вершины A, B, то отложим от них на боковых сторонах по $1/8$, получив точки E, F. Так как $AF = BE = \sqrt{65}/8$, то E и F не принадлежат первой части. Пусть M – середина стороны CD. Тогда $AM = BM > \sqrt{65}/8$; $EM = FM = \sqrt{65}/8$. Значит, M не принадлежит тем частям, что A, B, E, F. Поэтому E и F принадлежат одной и той же части. Вершины C, D могут принадлежать лишь третьей части. Отложив от них на боковых сторонах по $1/8$, получим точки, которые не могут входить в одну часть ни с C, D, ни с A, B ни с E, F.

3. Если фокусник всегда называет одну и ту же масть, то он угадает 13 карт. Рассмотрим теперь произвольную стратегию. Пока в колоде остаются хотя бы две масти, очередная карта может оказаться не той масти, которую назвал фокусник. Поэтому при любой стратегии может случиться, что фокусник отгадает лишь карты последней масти в колоде.

4. Вокруг четырехугольника AB_1OC_1 можно описать окружность; $\angle OAB_1 = \angle OC_1B_1$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Аналогично, $\angle OBA_1 = \angle OC_1A_1$. В окружности, описанной около треугольника ABC, вписанные углы OAB_1 и OBA_1 опираются на дуги A_2C и B_2C, поэтому их сумма равна $\angle A_2C_2B_2$. Отсюда

$$\angle A_1C_1B_1 = \angle OC_1B_1 + \angle OC_1A_1 = \angle A_2C_2B_2.$$

Равенство других углов в рассматриваемых треугольниках доказывается аналогично.

5. Уравнение выполняется, если $f(x)$ тождественно равно нулю или какому-либо корню степени $n-1$ из $1/2$. Покажем, что других решений нет. Положим $x = y = 0$: $f(0) = 2f^n(0)$. Отсюда $f(0)$ равно одной из перечисленных констант. Пусть теперь x любое, $y = 0$: $f(x) = f^n(x) + f^n(0)$. Значения $f(x)$ являются корнями многочлена $z^n - z + f^n(0)$, поэтому их количество конечно.

Теперь пусть x любое, $y = x$: $f(2x) = 2f^n(x)$. С учетом предыдущего

$$f(2x) = 2f(x) - 2f^n(0) = 2f(x) - f(0).$$

Если $f(x) > f(0)$, то $f(2x) > f(x)$ и т.д., тогда как множество значений функции конечно. Аналогично, $f(x)$ не может быть меньше $f(0)$.

6. Для произвольной последовательности t рассматриваемого вида положим $Z_t = Z \cap tZ$. Пусть σ – сумма количеств элементов во всех множествах Z_t. Для любых последовательностей p, q существует, и притом ровно одна, последовательность r такая, что $p = rq$. Значит, каждый элемент множества Z входит ровно в k множеств Z_t, и потому $\sigma = k^2$. Так как в этой сумме 2^n слагаемых, то хотя бы одно из них не превосходит $k^2/2^n$. Аналогично получается оценка $l_k = \dfrac{k(k-1)}{2^n-1}$, при $2^n > k > 0$ она более точна. Легко видеть, что оценки l_1 и l_{2^n-1} неулучшаемы.

7. Допустим, утверждение задачи неверно. На прямой a, ограничивающей верхнюю полуплоскость, лежат какие-то вершины многоугольников, причем расстояние между любыми из них не меньше 0,000001. Поэтому если двигаться по a слева направо, то для каждой вершины M однозначно определена следующая вершина N (удаленная от M не больше чем на 1). Пусть b – самая правая из прямых разбиения, проходящих через M, а c – самая левая из проходящих через N. Для многоугольника, примыкающего к a, возможные направления выдвигания – это те, которые «смотрят» внутрь многоугольника относительно любой из его сторон, кроме a. По предположению множество таких направлений пусто. Как следствие, прямая разбиения при движении по a слева направо поворачивается по часовой стрелке. Отсюда получаем, что полоса между a, b и c может быть пересечена только горизонтальными прямыми. Но тогда диаметры многоугольников в этой полосе в совокупности не ограничены (при удалении от a прямые b и c удаляются друг от друга).

Избранные задачи Московакой физической олимпиады

Первый теоретический тур

8 класс

1. $h = \dfrac{2mr - \alpha m_1 q + m\lambda + 2mc(t_2 - t_1)}{\rho r V^{2/3}} \approx 8{,}23$ см (здесь $t_2 = 100\ ^\circ\mathrm{C}$).

2. $m = M\dfrac{y - x}{y(1+2x)} = \dfrac{M}{6}$.

3. $\Delta F = 0$, если $\rho \le \rho_0$; $\Delta F = mg(1 - \rho_0/\rho)$, если $\rho > \rho_0$.

9 класс

1. Скорость источника света равна $u\sqrt{2}$ и направлена под углом 45° к стенкам.

2. $t \approx 120 \pm 10$ с. *Указание.* Постройте график зависимости $1/v$ от x и вычислите площадь под получившейся кривой.

3. $t_1 = t\dfrac{3v - u}{3v + u}$, при этом $u < 3v$.

4. $\omega > \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2g\cos\alpha}{L}}$.

10 класс

1. $F = mgh/l$.

2. Пете понадобится на 10 банок больше.

3. Теплоемкость постоянна и равна $2R$.

4. $R_x = R$. Заметим, что эту задачу нельзя решить в предположении, что внутреннее сопротивление батарейки отсутствует.

11 класс

1. $B_1 = B/4$.

2. $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \approx 72^\circ$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. Ни в каком (месяц «рогами» вверх можно увидеть только вблизи экватора, где снег бывает лишь высоко в горах, а пейзаж на картинке равнинный).

2. $\tau_1 = \tau L/l = 6$ ч.

3. $M = NmL\left(S_2 + S_1 v_1/v_2\right) \approx 250$ г.

9 класс

1. Скорости автомобилей одинаковы и равны 20 м/с.

10 класс

1. Сила равна $N = mg\sqrt{1 - (5/9)\sin^2\alpha}$ и направлена под углом $\varphi = \arcsin\dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{9 - 5\sin^2\alpha}}$ к соответствующему третьему стержню.

2. $\alpha = \pi$, если $\Delta W > mv^2/2$; $\alpha = \pi/2$, если $\Delta W = mv^2/2$ и оба осколка движутся (если один из осколков останавливается, то угол α не определен); $\alpha = \arccos\dfrac{mv^2 - 2\Delta W}{mv^2 + 2\Delta W}$, если $\Delta W < mv^2/2$.

3. $p = p_0 T_2/T_1 + np_0 + (1-n)p_н \approx 1{,}9 \cdot 10^5$ Па.

4. $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{101}; \frac{2\pi}{100}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{100}; \frac{2\pi}{99}\right)$.

11 класс

1. $t = 2\sqrt{2l_{\text{т}}L}/v \approx 6{,}4$ с.

2. Не менее 10 циклов.

V Международная астрономическая олимпиада

Теоретический тур

8–10 классы

1. В 490-м столетии для невисокосных лет (периодов времени, начинающихся с 1 марта високосных лет и заканчивающихся 28 февраля последующих лет) и в 491-м для високосных лет.
2. Линейные размеры первой звезды немного более чем в 2 раза превышают линейные размеры второй звезды.
3. $e \approx 0{,}07$; около полугода.
4. Да. Например, астронавта можно обнаружить по его тени, так как Море Холода находится в районе северного полюса Луны, где лучи Солнца падают под малыми углами к горизонту и отбрасывают длинные тени.
5. $\rho \approx 4250$ кг/м^3.
6. Нужно установить камеру на экваторе и сделать от 1146 до 1800 снимков.

11–12 классы

1. а) $v \approx 277000$ км/с; $R \approx 3700$ Мпк.
Указание: используйте формулы специальной теории относительности.
2. Шесть.

VII Российская олимпиада по астрономии и физике космоса

(см. «Квант» №3)

Теоретический тур

8 класс

1. Земля «перехватывает» немного более широкий пучок солнечного света, чем это было бы в отсутствие атмосферы.
2. Затмения наиболее продолжительны, когда Луна будет в апогее. Дополнительные условия: затмение должно быть центральным; на долготе наблюдателя Луна должна быть близка к кульминации.
3. ≈ 1 мин 26 с.
4. Разрешение глаза Комова не хуже $1{,}3-1{,}5'$, так что зрение у него вполне хорошее.
5. 29,53 земных суток, или одни лунные сутки.
6. На Уране.

9 класс

5. Да, представится.
6. Из Пегаса или Водолея.

10 класс

2. $\approx 1{,}72$ земного года.
3. $-3{,}2^m$. **4.** $4{,}7 \cdot 10^{20}$ кг.

11 класс

4. Антенны следует располагать на околоземных орбитах.
5. 0,13. **6.** $5{,}6 \cdot 10^7$ К.

IX Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

(см. «Квант» №3)

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. а) 28002; б) $45n \cdot 10^{n-1} + 1$.
Указание. Разобьем числа от 0 до $\underbrace{99\ldots9}_{n}$ на пары: $(\underbrace{99\ldots9}_{n}, 0)$; $(9\ldots98, 1)$; …; $(5\underbrace{0\ldots0}_{n-1}, 4\underbrace{9\ldots9}_{n-1})$. Сумма цифр в каждой паре равна $9n$, всего пар $5 \cdot 10^{n-1}$.
2. $\left(1+\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right)$, $\left(1-\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}\right)$. *Указание.* Сложив первое неравенство с удвоенным вторым, имеем $(x-2y-1)^2 \le 0$, т.е. $x = 2y+1$, $2y^2 + 2y - x = 0$.
3. $\pi - \alpha$. *Указание.* Поскольку $\angle IBJ = \angle ICJ = 90^\circ$, точки I, B, J, C лежат на окружности с центром в точке M.
4. а) 10; б) 11; в) $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. *Указание.* Пусть k такое, что среди n человек нет двух поздравивших друг друга. Тогда общее количество поздравлений равно nk, причем $nk \le \frac{n(n-1)}{2}$, т.е. $k \le \frac{n-1}{2}$.
Если $k \ge \left[\frac{n+1}{2}\right]$, то $nk > \frac{n(n-1)}{2}$ и, значит, найдется пара поздравивших друг друга. Если $k \le \left[\frac{n-1}{2}\right]$, то можно так организовать поздравление, что никакие двое не поздравят друг друга.
5. а)Можно; б) можно. На рисунке 11 сначала показано, как разрезать на равнобедренные трапеции правильный треугольник, а потом – как разрезать квадрат и равнобедренный прямоугольный треугольник на трапеции и правильные треугольники.

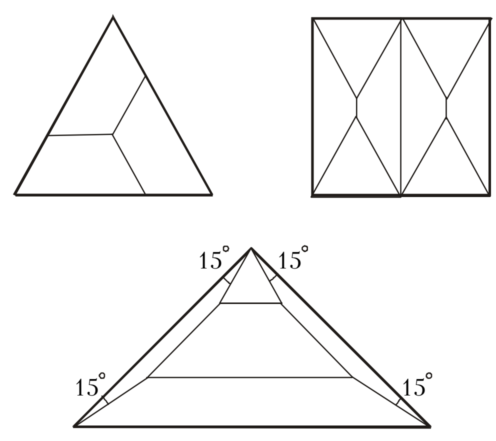

Рис. 11

6. $4a$. *Указание.* Докажите, что $BN = 2AN$, а $\Delta ADB = \Delta DMC$, так что $DC = AB$.
7. а) Можно; б) можно; в) нельзя, так как сумма $1^3 + 2^3 + \ldots + 2001^3$ нечетна.
Указание для случаев а) и б). Возьмем 16 последовательных кубов целых чисел $k^3, (k+1)^3, \ldots, (k+15)^3$ и докажем, что можно так расставить знаки «+» и «–» между ними, что получится 0. Для этого рассмотрим 8 равенств (k фиксирова-

но):

$$k^3 = k^3,$$
$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k^2 + 1,$$
$$(k+2)^3 = k^3 + 3k^2 \cdot 2 + 3k \cdot 2^2 + 2^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(k+7)^3 = k^3 + 3k^2 \cdot 7 + 3k \cdot 7^2 + 7^3.$$

Заметим, что при любом l

$$l^2 - (l+1)^2 - (l+2)^2 + (l+3)^2 = 4,$$
$$l - (l+1) - (l+2) + (l+3) = 0.$$

Поэтому

$$k^3 - (k+1)^3 - (k+2)^3 + (k+3)^3 - (k+4)^3 +$$
$$+ (k+5)^3 + (k+6)^3 - (k+7)^3 = -1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 + 6^3 - 7^3$$

при любом k.

Но это значит, что расстановка знаков

$$+ - - + - + + - - + + - + - - +$$

перед кубами любых 16 последовательных целых чисел дает нулевую сумму.

В случае а) разбиваем числа $1^3, 2^3, \ldots 1999^3$ на группы по 16 последовательных кубов начиная с нуля, а в случае б) — начиная с 1.

ФИЗИКА

1. $g \operatorname{ctg}\alpha > a \ge g \dfrac{1 - \sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu(1 - \sin\alpha)}$.

2. $v_{0\,\min} = \sqrt{g\left(\sqrt{L^2 + h^2} + h\right)}$.

3. $h_{\max} = \dfrac{RT}{\mathrm{M}g} \ln \dfrac{4\pi r^3 \rho_0}{3M} \approx 10$ км (здесь М – молярная масса воздуха, R – универсальная газовая постоянная).

4. Равновесие в системе определяется из условия

$$f(\alpha) = \frac{\beta\alpha}{\left(1 + \alpha^2\right)^{3/2}} = 1,$$

где $\alpha = \dfrac{x}{R}$ и $\beta = \dfrac{kqQ/R^2}{mg}$. График на рисунке 12 представлен для случая $gQ > 0$. Здесь точка *1* соответствует устойчивому равновесию, а точка *2* – неустойчивому.

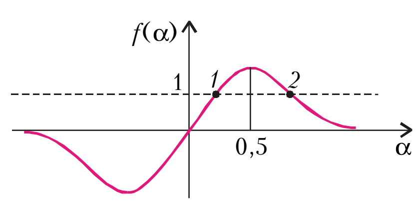

Рис. 12

5. $E_p \approx 3{,}4$ эВ; $E_{\text{H}} \approx 4{,}5$ эВ, $E_{\text{D}} \approx 2{,}3$ эВ.

6. $P = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} \dfrac{N-2}{N}$, $N \ge 3$.

7. $\tau \sim \dfrac{h}{\sqrt{gR\rho_{\text{в}}/\rho_0}} \sim 100$ с; большие капли падают быстрее.

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. 5. *Указание.* Из условия следует, что сумма чисел, вычеркнутых Борей и Витей, делится на 4. Поэтому могло бы остаться одно из трех чисел: 1, 5 или 9. Числа 1 и 9 отпадают (если, например, осталось число 1, то сумма чисел, вычеркнутых Борей, равна 11, но это невозможно; если 9 – рассуждаем аналогично).

2. $S/3$. Площадь «косого» сектора AMP равна площади сектора OMP, где O – центр окружности.

3. 27. *Указание.* Рассыпанное число делится на 9, больше 20^6, но меньше 30^6. Потому a – одно из трех чисел: 21, 24 и 27; так как 21^6 оканчивается на 1, а 24^6 – на 6, то это 27.

4. Да. См., например, рис.13.

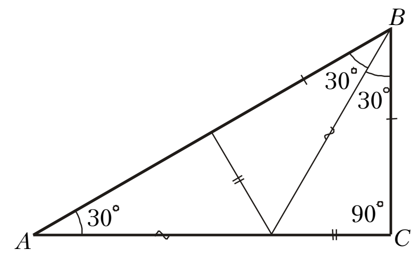

Рис. 13

5. а) Нет; б) нет.

Указание. а) Докажите, что в описанном многоугольнике с четным числом сторон суммы сторон, взятых через одну, равны. Однако сумма 1 + 2 + … + 2002 нечетна.

б) Отрезки длиной 1999, 2000 и 1 касаются окружности. Это невозможно, так как 2000 = 1999 + 1.

6. а) Можно. Например, последовательность $\dfrac{k}{2000!}$, где $k = 1, 2, \ldots, 2000$, – арифметическая прогрессия.

б) Нет. В арифметической прогрессии $a_{n+1} - a_n = d$ – постоянная величина. Но в бесконечной последовательности вида $\dfrac{1}{n_k}$ разность соседних членов $\dfrac{1}{n_k} - \dfrac{1}{n_{k+1}}$ стремится к нулю.

7. 60° и 120°. *Указание.* $AH = 2R|\cos A|$, откуда $|\cos A| = 1/2$.

8. $x + y + z = 3$. *Указание.* Числа x, y, z – различные корни уравнения $t^3 - 3t^2 + a = 0$.

9. S. *Указание.* Площади сегментов, занумерованные на рисунке 14, равны.

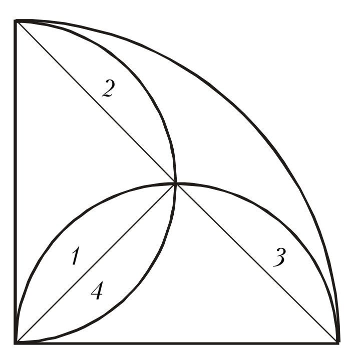

Рис. 14

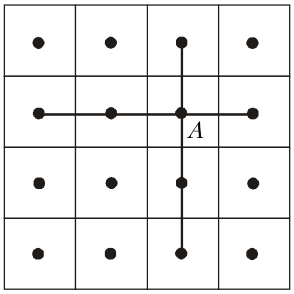

Рис. 15

10. 9 и 1. *Указание.* $(x-v)^2+(y-u)^2$ – квадрат расстояния от точки (x,y) на окружности $x^2+y^2=1$ до точки (v,u) на окружности $v^2+u^2=4$.

11. Существует. На рисунке 15 центрами клеток квадрата 4×4 изображены члены компании из 16 человек. Шестеро друзей каждого из них расположены в той же вертикали и той же горизонтали, что и он сам. Ясно, что каждые двое имеют в точности двух общих друзей.

12. Нет. Если $A=\overline{a_1a_2\ldots a_n}$, то $a_1\cdot 10^{n-1}<A<a_1\cdot 9^{n-1}$, что невозможно.

ФИЗИКА

1. В 2 раза.
2. Ртуть сместится в сторону второго сосуда.
3. Скорости звука в воздухе и в металле различны.
4. Днем.
5. С шарика на поверхность.
6. В первом случае солнечные лучи сильнее рассеиваются.
7. $\tau\sim 10^{-5}$ с.
8. Спиртовой.
9. Никакие.
10. В первом случае основную роль играют магнитные, а не электрические силы.

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

2. Леонардо Пизанский по прозвищу Фибоначчи (сын Боначчи). Числа f_n называются числами Фибоначчи. Рассмотрев последовательность остатков от деления f_n на 3, т.е. 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, ..., нетрудно заметить периодичность этой последовательности с периодом 8. А так как $f_4=3$ и $f_8=21$ делятся на 3, то f_n делится на 3 тогда и только тогда, когда n делится на 4.

3. 2π. *Указание.* Искомая площадь равна площади прямоугольника $OABC$ (рис.16).

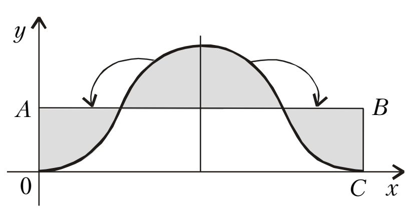

Рис. 16

4. $1/3$. *Указание.* Пусть $S=1-2+2^2-2^3+\ldots$. Тогда $S=1-2S$, т.е. $S=1/3$.

5. Давид Гильберт. Речь идет о 3-й проблеме Гильберта: равносоставлены ли куб и правильный тетраэдр того же объема? Отрицательное решение получено в 1903 году немецким математиком Дэном.

ФИЗИКА

1. Джордж Гамов; 50-е годы; ~6 К.
2. Майкл Фарадей; 1831 год.
3. А.Эйнштейн (1916 г.), В.А.Фабрикант (1939 г.), Н.Г.Басов, А.М.Прохоров и Ч.Таунс (1954 г.); усиление света в результате вынужденного излучения.
4. Ускорение электрическим полем; линейные, циклические, на встречных пучках и т.д.; 30-е годы; В.И.Векслер, Г.И.Будкер, Э.Макмиллан и др.; США, Россия, Швейцария.
5. Нильс Бор.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г. Чехов Московской области
Заказ №