Отклонение частиц и световых лучей полем тяготения

С. КОЖИНИН

Рассмотрим несколько интересных задач о движении классических частиц и фотонов в полях тяготения планет и звезд.

Задача 1. Рассеяние частицы полем Земли

На какой угол θ *изменится направление скорости пролетающей мимо Земли метеорной частицы под действием поля земного тяготения (рис.1)? Скорость частицы на бесконечности равна* v_∞*. Влияние атмосферы Земли не учитывать.*

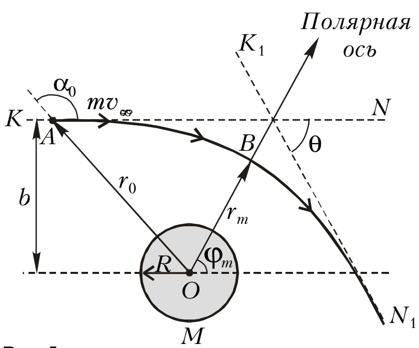

Рис. 1

При решении задачи учтем (без вывода), что частица движется по гиперболической траектории. Опираясь на геометрические свойства гиперболы, можно доказать, что угол рассеяния θ, прицельное расстояние b и расстояние r_m от центра планеты до ближайшей точки B траектории частицы связаны соотношением

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{b^2 - r_m^2}{2br_m}. \qquad (1)$$

Действительно, гипербола – это геометрическое место точек, разность расстояний до которых от двух заданных точек O и O', называемых фокусами (рис.2), постоянна: $r_1 - r_2 = \text{const}$. Один из фокусов гиперболы O совпадает с центром Земли, второй фокус O' лежит на прямой, проходящей через центр Земли и ближайшую к центру точку B траектории. На бесконечно больших расстояниях от Земли как при приближении, так и при удалении скорость частицы направлена по асимптоте гиперболы, поэтому задача состоит в нахождении угла θ между асимптотами. Точка пересечения асимптот лежит посередине между фокусами.

Приравняем разности расстояний от фокусов O и O' до бесконечно удаленной точки – это отрезок $O'C$ на рисунке 2 – и до ближайшей к центру Земли точки. Из треугольника $OO'C$ находим

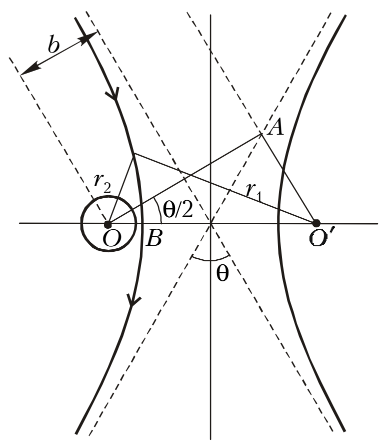

Рис. 2

$$OC = 2b,$$

$$O'C = 2b\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\ OO' = \frac{2b}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Разность расстояний от фокусов до точки B составляет

$$BO' - BO = \left(OO' - BO\right) - BO,$$

где $BO = r_m$. Теперь условие равенства разности расстояний до выбранных точек можно записать в виде

$$2b\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{\cos\frac{\theta}{2}} - 2r_m.$$

Перенося $2r_m$ в левую часть, возводя обе части в квадрат и используя тождество

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \operatorname{tg}^2\theta,$$

получаем формулу (1).

Запишем теперь законы сохранения энергии E и момента импульса L частицы для участка AB ее траектории (см. рис.1):

$$E_A = E_B,\ L_A = L_B,$$

или

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2} - \frac{GMm}{r_m}, \qquad (2)$$
$$bv_\infty = r_m v_m,$$

где v_m – скорость частицы в точке B; мы учли, что точка A находится в бесконечности, поэтому $L_A = L_\infty = r_0 mv_\infty \sin\alpha_0 = bmv_\infty$, а $L_B = r_m mv_m \sin 90^\circ = r_m mv_m$. (Отметим, что вместо закона сохранения момента импульса можно использовать второй закон Кеплера.) Из равенств (2) получаем

$$r_m^2 + \frac{2GM}{v_\infty^2} r_m - b^2 = 0. \qquad (3)$$

Если считать заданным расстояние r_m, то для прицельного расстояния b находим

$$b = r_m\sqrt{1 + \frac{2GM}{r_m v_\infty^2}}.$$

Если считать заданным расстояние b, то для r_m находим

$$r_m = \frac{GM}{v_\infty^2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{bv_\infty^2}{GM}\right)^2} - 1\right). \qquad (4)$$

Для определенности будем считать известным прицельный параметр b. Тогда, с учетом (3), для угла рассеяния получаем

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{GM}{bv_\infty^2}. \qquad (5)$$

Метеорная частица не задевает планету, если $r_m \gtrsim R$ (см. рис.1). При $r_m = R$ расстояние b оказывается минимальным и равным

$$b_{\min} = R\sqrt{1 + \frac{2GM}{Rv_\infty^2}} = R\sqrt{1 + \left(\frac{v_{2к}}{v_\infty}\right)^2},$$

где $v_{2к} = \sqrt{2GM/R}$ – вторая космическая (параболическая) скорость. При заданном значении v_∞ и минимальном прицельном расстоянии $b_{\min}$ угол отклонения (или угол рассеяния) максимален: $\theta = \theta_{max}$ и

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_{max}}{2} = \frac{\left(v_{2к}/v_\infty\right)^2}{2\sqrt{1+\left(v_{2к}/v_\infty\right)^2}} = \frac{GM/\left(Rv_\infty^2\right)}{\sqrt{1+2GM/\left(Rv_\infty^2\right)}}.$$

Отсюда следуют важные частные случаи:

1) Если $v_\infty \gg v_{2к}$, то $b_{min} \approx R$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\left(\theta_{max}/2\right) \approx 0{,}5\left(v_{2к}/v_\infty\right)^2 = GM/\left(Rv_\infty^2\right).$$

Так как $v_{2к}/v_\infty \ll 1$, то

$$\theta_{max} \approx \frac{2GM}{Rv_\infty^2}$$

(мы учли, что при $x \to 0$ $\operatorname{tg} x \approx x$).

2) Если $v_\infty \ll v_{2к}$, то формула для угла рассеяния приводится к виду

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_{max}}{2} \approx \frac{v_{2к}}{2v_\infty}.$$

В предельном случае, когда $v_{2к}/v_\infty \to \infty$, получаем $\operatorname{tg}\left(\theta_{max}/2\right) \to \infty$ и, следовательно, $\theta_{max} \to 180^\circ$. Таким образом, при достаточно малых значениях v_∞ направление скорости частицы при облете центрального тела (планеты или звезды) изменится практически на противоположное!

Заметим, что обсуждаемую задачу можно решить, исходя из уравнения траектории частицы в полярных координатах:

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi, \qquad (6)$$

где φ – полярный угол, $p = L^2/(2m\alpha)$ – фокальный параметр частицы, $\varepsilon = \sqrt{1+2EL^2/\left(\alpha^2 m\right)}$ – эксцентриситет орбиты, $\alpha = GMm$, причем $m \ll M$, E и L – полная механическая энергия и момент импульса частицы соответственно. Из начальных условий получаем

$$E = E_\infty = \frac{mv_\infty^2}{2},\ L = L_\infty = mbv_\infty.$$

Следовательно, эксцентриситет орбиты равен

$$\varepsilon = \sqrt{1+\left(\frac{bv_\infty^2}{GM}\right)^2}. \qquad (7)$$

Так как $\varepsilon > 1$, частица движется по гиперболической траектории. Из выражения (6) следует, что при $\varphi = 0$ расстояние r минимально и равно

$$r_m = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(\varepsilon - 1), \qquad (8)$$

где $a = p/\left(\varepsilon^2-1\right) = \alpha/(2E)$ – полуось гиперболы. Легко убедиться в том, что формулу (8) можно привести к виду (4).

Определим угол φ_m между линией, соединяющей точки O и B (полярной осью), и направлением асимптоты K_1N_1, к которой приближается траектория частицы, удаляющейся в бесконечность (см. рис.1). Поскольку при $\varphi = \varphi_m$ $r = \infty$, то из формулы (6) получаем

$$\cos\varphi_m = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Угол отклонения θ и угол φ_m связаны соотношением $\theta = -\pi + 2\varphi_m$, поэтому последнее равенство принимает вид

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}.$$

Эту формулу можно получить непосредственно из свойств гиперболы. Подставляя сюда выражение (7) для ε, опять получаем формулу (5).

Задача 2. Отклонение светового луча Солнцем

Оцените угол отклонения θ луча света при его прохождении вблизи поверхности Солнца. Масса Солнца $M = 2\cdot 10^{30}$ кг, его радиус $R = 7\cdot 10^8$ м.

Будем считать, что свет состоит из корпускул массой m. Так как корпускула имеет массу, ее траектория должна искривляться под действием силы гравитации, подобно тому как искривляются траектории обычных частиц или тел, движущихся в полях тяготения планет и звезд.

Предположим, что световая корпускула движется в поле тяготения звезды по гиперболической траектории (см. рис.1).Если рассматривать световую корпускулу как классическую частицу с кинетической энергией $E_k = mv^2/2 = mc^2/2$, то для оценки угла θ можем воспользоваться результатами задачи 1: формула (5) теперь принимает вид

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{GM}{bc^2},$$

где $b \gtrsim R$. Легко убедиться в том, что для обычных небесных тел массой M и радиусом R выполняется условие

$$\frac{GM}{rc^2} \ll 1,\ R \le r \le \infty,$$

которое называют условием, или приближением, слабого поля (именно при этом условии поля тяготения являются ньютоновскими). Например, на поверхности Солнца $GM/\left(Rc^2\right) \approx 10^{-6}$. Учитывая малость угла θ, можно записать

$$\theta = \frac{2GM}{bc^2},$$

тогда для светового луча, проходящего вблизи поверхности звезды ($b \approx R$), получим

$$\theta \approx \frac{2GM}{Rc^2}.$$

Для Солнца $\theta \approx 0{,}87''$.

Заметим, что минимальное расстояние r_m по-прежнему определяется формулой (4), которая при $v_\infty = c$ принимает вид

$$r_m = \frac{GM}{c^2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{bc^2}{GM}\right)^2} - 1\right) \approx b\left(1 - \frac{GM}{bc^2}\right).$$

Очевидно, что рассмотренный способ решения задачи является некорректным с точки зрения современной физической теории. Действительно, в рамках данного способа скорость световой корпускулы изменяется от $v_\infty = c$ до $v_m = bv_\infty/r_m = bc/r_m$. Понятно, что при $b \approx r_m \approx R$ $v_m \approx v_\infty = c$, но это приближение ничего не меняет по существу: скорость света остается переменной величиной. Кроме того, теперь мы знаем, что классическая формула $E_k = mv^2/2$, где $v \ll c$, к световым частицам не применима: энергия световой частицы, т.е. кванта света, или фотона, определяется формулой Планка – Эйнштейна

$$E = mc^2 = \hbar\omega,$$

а скорость фотона в вакууме всегда равна c.

Теперь решим задачу другим способом, исходя из квантовой теории света. Метод решения задачи остается прежним: воспользуемся законами сохранения энергии и момента импульса фотона (кванта света), движущегося в слабом поле тяготения звезды. Полная энергия фотона равна

$$E = \hbar\omega - \frac{GMm}{r} = \hbar\omega\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) = \mathrm{const}$$

(мы учли, что масса фотона равна $m = \hbar\omega/c^2$). Момент импульса фотона равен

$$L = rmc\sin\alpha = r\frac{\hbar\omega}{c}\sin\alpha = \mathrm{const}.$$

Рассмотрим движение фотона на участке AB траектории, которую по-прежнему будем считать гиперболической (см. рис.1). Законы сохранения энергии: $E_A = E_B$ и момента импульса: $L_A = L_B$ дают уравнения

$$\omega_0 = \omega\left(1 - \frac{GM}{r_m c^2}\right),$$

$$b\omega_0 = r_m\omega,$$

где ω_0 – частота фотона в точке A, находящейся в бесконечности, ω – частота фотона в точке B на расстоянии r_m от центра звезды. Из первого уравнения непосредственно следует, что $\omega > \omega_0$ – так называемое фиолетовое гравитационное смещение. Из обоих уравнений получаем

$$r_m^2 - br_m + \frac{GMb}{c^2} = 0.$$

Если считать заданным прицельный параметр b, то

$$r_m = \frac{b}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2R_g}{b}}\right),$$

где $R_g = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус (или радиус Шварцшильда). Для обычных небесных тел $R_g/R = 2GM/(Rc^2) \ll 1$, т.е. поля тяготения являются слабыми. Например, гравитационный радиус Солнца равен $R_g = 2GM/c^2 \approx 3$ км, т.е. $R_g \ll R$.

Так как $b \gtrsim R$, то в приближении слабого поля можно записать

$$r_m = \frac{b}{2}\left(1 \pm \left(1 - \frac{R_g}{b}\right)\right),$$

или

$$r_{m1} = b\left(1 - \frac{R_g}{2b}\right) \text{ и } r_{m2} = \frac{R_g}{2}.$$

Очевидно, что второе решение не имеет смысла, поэтому окончательно получаем

$$r_m = b\left(1 - \frac{R_g}{2b}\right).$$

Аналогично, для угла отклонения θ находим

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{R_g}{2b} = \frac{GM}{bc^2},\quad \theta \approx \frac{R_g}{b} = \frac{2GM}{bc^2}.$$

Как видим, в приближении слабого поля результаты, полученные с обеих точек зрения – классической и квантовой, – полностью совпадают.

Отметим, что в 1915 году расчет угла отклонения выполнил А.Эйнштейн. Согласно общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна, в поле гравитации (тяготения) изменяются законы геометрии и ход времени (искривление пространства – времени). Из уравнений ОТО следует, что траектория светового луча в слабом поле тяготения звезды определяется уравнением

$$\frac{b^2c^2/(GM)}{r} = 1 + \frac{bc^2}{GM}\cos\varphi + \sin^2\varphi.$$

Как видно, это уравнение отличается от уравнения траектории классической световой корпускулы членом $\sin^2\varphi$. Учитывая, что $\theta = -\pi + 2\varphi_m$, получаем формулу Эйнштейна для угла отклонения светового луча:

$$\theta = \frac{2R_g}{b} = \frac{4GM}{bc^2}.$$

Для луча, проходящего вблизи поверхности звезды ($b \approx R$), этот угол равен

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

В частности, для Солнца

$$\theta = 4GM/(Rc^2) \approx 1{,}75''.$$

Понятно, насколько важно было измерить угол θ. Результаты измерений должны были подтвердить (или опровергнуть) выводы ОТО об искривлении пространства – времени. Первые измерения удалось осуществить во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 года астрономам А.Эддингтону, Ф.Дайсону и К.Дэвидсону, которые организовали экспедиции в Бразилию и к берегам Африки. Сфотографировав звезды вблизи закрытого Луной Солнца, они измерили их смещения и рассчитали угол отклонения световых лучей. Он оказался в полном согласии с формулой Эйнштейна. В наше время угол θ измерен намного точнее путем радиоастрономических наблюдений (свет и радиоволны распространяются по тем же законам), не связанных с солнечными затмениями. Результаты измерений еще надежнее подтверждают теоретическую формулу.

ОТО включает в себя принцип соответствия, согласно которому в случае слабых полей и малых скоростей ($v \ll c$) все предсказания ОТО должны совпадать с предсказаниями ньютоновской теории. Последнее означает, что траектории (геодезические) нерелятивистских частиц «не чувствуют» кривизну трехмерного пространства. Но когда речь идет о траекториях фотонов, учет пространственной кривизны становится существенным. Можно сказать, что искривление траектории фотонов слагается из двух эффектов: эффекта изменения хода часов (искривление времени) и эффекта искривления пространства. При решении задачи в рамках ОТО автоматически учитываются оба эффекта, в результате для угла отклонения ОТО дает формулу, которая отличается от классической формулы множителем «2». Очевидно, что эта разница играет фундаментальную роль.

Задача 3. Звезда как гравитационная линза

Теория тяготения предсказывает, что любое гравитирующее тело (планета, звезда и т.п.) должно отклонять световые лучи. Следовательно, любое гравитирующее тело должно действовать наподобие оптической линзы, фокусируя световые лучи в некоторой точке F, называемой фокусом линзы.

Предположив, что звезда массой M и радиусом R является гравитационной линзой и действует так (или почти так), как действует обычная оптическая собирающая линза, оцените фокусное расстояние F такой линзы (рис.3).

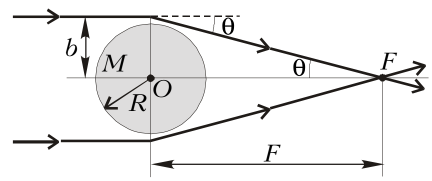

Рис. 3

Как видно из рисунка 3,

$$F = \frac{b}{\operatorname{tg}\theta}.$$

Воспользуемся результатами предыдущей задачи. В приближении слабого поля и с учетом малости угла θ получаем

$$F \approx \frac{b}{\theta} \approx \frac{b^2}{R_g} = \frac{b^2c^2}{2GM}.$$

При $b \approx R$

$$F \approx \frac{R^2}{R_g} = \frac{R^2c^2}{2GM}.$$

Для Солнца, например, $F \approx 1{,}7 \cdot 10^{14}$ м. А так как расстояние от Земли до Солнца равно $l = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м, то $F \gg l$. Понятно, что наблюдать с Земли линзовый эффект в поле тяготения Солнца нельзя. С другой стороны, ближайшая к нам звезда Проксима Центавра находится от нас на расстоянии $l \approx 4 \cdot 10^{16}$ м $\gg F$. Следовательно, любая из удаленных звезд может стать гравитационной линзой. Необходимо только, чтобы источник излучения, звезда-линза и наблюдатель расположились на одной прямой.

(Окончание см. на с. 43)

В рамках ОТО фокусное расстояние гравитационной линзы определяется с учетом формулы Эйнштейна и поэтому равно

$$F = \frac{b^2}{2R_g} = \frac{b^2c^2}{4GM}.$$

Для Солнца при $b \approx R$ получаем $F \approx 8{,}3 \cdot 10^{13}$ м. Понятно, что сделанные выше выводы о возможности наблюдения эффекта гравитационной линзы от Солнца и звезд остаются в силе.

Эффект гравитационной линзы был предсказан Эйнштейном в 1936 году, но он оставался лишь теоретическим предсказанием более сорока лет. В 1979 году был открыт удивительный объект – двойной квазар QSO 0957 + + 561. Изображение квазара, полученное в различных диапазонах электромагнитного излучения, состояло из двух отдельных почти точечных изображений, отделенных друг от друга угловым расстоянием 5,7″, имеющих идентичные спектры и почти одинаковую яркость. Гравитационной линзой в этом случае служила большая эллиптическая галактика (или скопление галактик), находящаяся на пути от квазара к Земле и создающая его двойное изображение.

В обычной (тонкой) линзе, как известно, все преломленные лучи собираются в одной точке – фокусе линзы. В гравитационной линзе дело обстоит не так: чем ближе к притягивающему центру проходит луч, тем сильнее он преломляется и тем меньше расстояние от центра до точки F пересечения лучей. Вместо одного фокуса в гравитационной линзе возникает целая фокальная ось. Если ядро гравитационной линзы не пропускает свет, то пересечение лучей возможно только начиная с некоторого минимального расстояния F, определяемого последней формулой. В этой точке и начинается фокальная ось, которая простирается в область $x > F$.

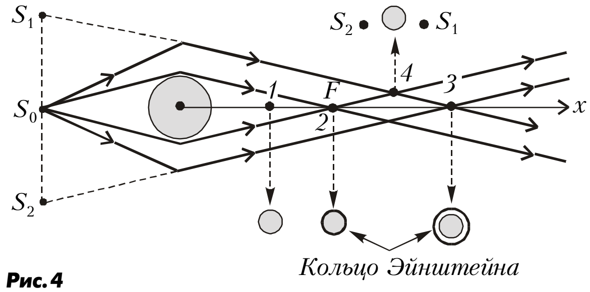

Рис. 4

На рисунке 4 показано, как выглядит «точечный» источник, если смотреть на него сквозь гравитационную линзу. Если наблюдатель находится на оси в точке *1*, где $x < F$, то источник S_0 совсем не виден, так как он закрыт непрозрачным ядром линзы. В точке *2*, где $x = F$, изображение источника появляется со всех сторон от ядра, поэтому здесь источник виден как светящееся кольцо, примыкающее к ядру. При увеличении расстояния (точка *3*) кольцо отрывается от ядра, между ними возникает зазор, который постепенно возрастает по мере удаления наблюдателя (кольцевое изображение источника называют кольцом Эйнштейна). Теперь представим, что удаленный наблюдатель сместился на некоторое расстояние от оси (точка *4*). Картина становится совсем иной. Симметрия лучей нарушается, светящееся кольцо разрывается на две дуги, которые по мере удаления от оси стягиваются в маленькие кружки. Наблюдатель увидит вместо одного источника S_0 два его изображения: S_1 и S_2.