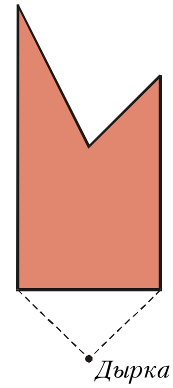

Рис. 7

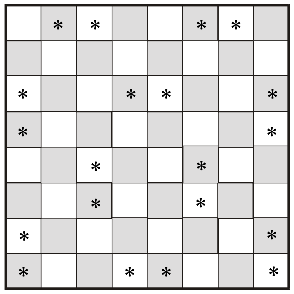

Рис. 8

3. Да, могло; например, если в исходном проекте было 5 подъездов, 4 этажа и на каждом этаже по одной квартире: $5 \cdot 4 = 20$, $3 \cdot 7 = 21$, $1 \cdot 10 = 10$.
4. На рисунке 7 закрашено множество точек, в которые можно вбить гвоздь.
5. Пример приведен на рисунке 8.

Задачи для старших классов

8 класс

1. Это клетка, расположенная в строке 51 и столбце 50. Сначала будет закрашен наружный слой клеток, после чего останется прямоугольник 98×198 клеток. Этот прямоугольник также закрашивается по спирали, и т.д. После окраски 49-го слоя останется прямоугольник, расположенный в строках 50–51 и столбцах 50–151. Последней будет закрашена его нижняя левая клетка.
2. Да. Можно, например, ставить точки на окружности через равные достаточно малые интервалы.
3. 25. Напишем слова в столбик. После всех замен буквы в каждом столбце должны стать одинаковыми. Число замен будет наименьшим, если в каждом столбце сохранить наиболее частую букву. Наименьшее число замен равно 4 + 4 + 5 + 4 + + 4 + 4 = 25. (В результате могут получиться и осмысленные слова, например ЗЕЛЕНЬ, КАПЕЛЬ или КАФЕЛЬ.)
5, 6. Расположим двузначные числа в клетках прямоугольника, откладывая по горизонтали единицы, по вертикали – десятки. Каждой попытке Гриши соответствует крестик из пяти клеток, в центре которого – названное им число (если оно содержит цифру 0 или 9, то часть крестика выходит за края прямоугольника). Покрытие прямоугольника 22 крестиками легко найти, если заметить, что крестиками можно выложить плоскость без перекрытий (правда, придется добавить несколько крестиков по краям прямоугольника). Например, можно назвать числа 11, 13, 17, 25, 29, 30, 32, 37, 44, 49, 51, 56, 63, 68, 70, 75, 82, 87, 89, 90, 94, 97 (рис.9).

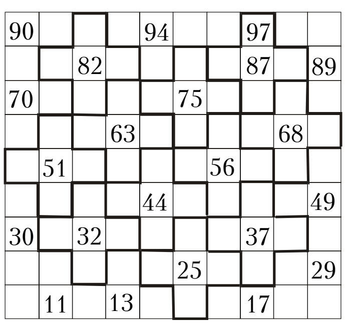

Рис. 9

В задаче 6 суммарная площадь крестиков равна $18 \times 5 = 90$, т.е. площади прямоугольника. Но, покрывая угловую клетку, мы выйдем за пределы прямоугольника, и эта потеря помешает покрыть весь прямоугольник.

9 класс

1. Да. Расставим футболистов на прямой так, чтобы расстояние между первым и вторым было 2 м, между вторым и третьим – 3 м, между третьим и четвертым – 1 м.
2. Да. Допустим, что в каждом регионе все получают одинаковую зарплату и есть регион, в котором живут те самые 10% работников, которые получают 90% всей зарплаты.
3. Перпендикуляры к сторонам угла, восставленные в точках B и C, пересекаются в точке M', диаметрально противоположной M. Из равенства углов падения и отражения получаем, что M' – центр вписанной, а M – вневписанной окружности треугольника ABC. Поэтому диаметр MM' (включающий точку O) лежит на биссектрисе угла BAC.
Дополнение. Покажите, что O лежит на описанной окружности ΔABC.
4. Нет. Если в некоторый момент количество камней в каждой куче делится на некоторое нечетное число, то так будет и дальше. После первого хода можно получить три варианта размещения камней: 100 и 5 (общий делитель 5), 56 и 49 (делитель 7), 51 и 54 (делитель 3).
5. Такое число существует для любого k: $N_k = 9k \cdot \left(10^k - 1\right)$. Пусть $9k = \overline{s_1 \ldots s_t 0 \ldots 0}$ ($s_t \neq 0$, нулей на конце может и не быть). При любом k имеем $9k < 10^k$. Поскольку $N_k = 9k \cdot 10^k - 9k$, то сумма цифр числа N_k равна

$$s_1 + \ldots + s_t - 1 + 9 + \ldots + 9 + (9 + 1) - s_1 - \ldots - s_t = 9k$$

(в левой части k девяток).
6. а), б) Нет. Обозначим сумму очков участника A через S_A, а его коэффициент силы через F_A. Сумма $\Sigma_A S_A F_A$ равна сумме чисел вида $\pm S_A S_B$, где шахматисты A и B сыграли не вничью. Каждое такое слагаемое входит один раз со знаком «+» и один раз со знаком «–». Поэтому вся сумма равна 0, и коэффициенты силы не могут все одновременно быть положительными или отрицательными.

10 класс

1. Да. Например, x^2, $(x-1)^2$ и $(x-2)^2$.
3. Многочлены задачи получаются из нечетных многочленов $f(t)$ (для которых $f(-t) = -f(t)$) по формуле $P(x) = f(x - 1/2) + 1/2$. Например, при $f(t) = t^{2001}$ получаем $P(x) = (x - 1/2)^{2001} + 1/2$.
4. Пусть H_1, H_2, H_3, H – ортоцентры треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B, ABC соответственно, M_1, M_2, M_3 – середины H_BH_C, H_CH_A, H_AH_B. Поскольку $H_CH_2 \| HH_A$, $H_AH_2 \| HH_C$, то точка H_2 симметрична H относительно середины отрезка H_AH_C. Такие же рассуждения справедливы для H_1 и H_3. Так как M_1M_2 – общая средняя линия треугольников $H_AH_BH_C$ и H_1H_2H, то $H_AH_B = H_1H_2$. Аналогично, $H_BH_C = H_2H_3$, $H_AH_C = H_1H_3$, поэтому треугольники $H_1H_2H_3$ и $H_AH_BH_C$ равны.
5. Не могут. Назовем расположение фишек одноцветным или разноцветным в зависимости от того, стоят ли они на клетках одинакового или разного цвета. При перемещениях фишек одноцветные и разноцветные расположения чередуются, поэтому их должно быть поровну. Но количество разноцветных расположений равно $2 \cdot 32^2$, а одноцветных – $2 \cdot 32 \cdot 31$, поскольку две фишки не могут стоять на одной клетке.
6. Да (см. рис.10). Пусть на кольце последовательно расположены точки A_1, B_2, A_3, B_1, A_2, B_3, причем от точек A_1, A_2, A_3 отходят «ветки» с k городами. Если первая армия первым ходом занимает точку на «ветке» длины k, то вторая

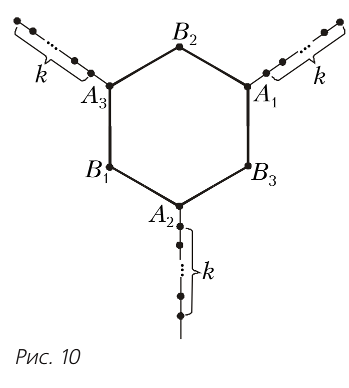

Рис. 10