чтобы попарные расстояния между ними составляли 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров?

А.Митягин

2. В некоторой стране суммарная зарплата 10 процентов самых высокооплачиваемых работников составляет 90 процентов зарплаты всех работников. Может ли быть, что в каждом из регионов, на которые делится страна, зарплата любых 10% работников составляет не более 11% всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

М.Вялый

3. Внутри угла с вершиной M отмечена точка A. Из этой точки выпустили шар, который отразился от одной стороны угла в точке B, затем от другой стороны в точке C и вернулся в A («угол падения» равен «углу отражения»). Докажите, что центр O окружности, описанной около ΔBCM, лежит на прямой AM.

А.Заславский

4. Камни лежат в трех кучах: в одной 51, в другой 49, а в третьей 5 камней. Разрешается объединять любые кучи в одну, а также разделять кучу из четного числа камней на две равные. Можно ли получить 105 куч по одному камню в каждой?

В.Клепцын

5. Натуральное число N в $999\ldots99$ (k девяток) раз больше суммы своих цифр. Укажите все возможные значения k и для каждого из них приведите пример такого числа.

Г.Гальперин

6. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Для каждого участника A было подсчитано число набранных им очков (за победу дается 1 очко, за ничью – $1/2$ очка, за поражение – 0 очков) и коэффициент силы по формуле: сумма очков тех участников, у кого A выиграл, минус сумма очков тех, кому он проиграл. Могут ли коэффициенты силы всех участников быть а) больше 0; б) меньше 0?

А.Толпыго

10 класс

1. Существуют ли три квадратных трехчлена, каждый из которых имеет корень, а сумма любых двух не имеет корней?

А.Белов

2. См. задачу М1781 «Задачника «Кванта».

3. Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2001, для которого выполняется тождество $P(x)+P(1-x)=1$.

В.Сендеров

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_A, BH_B и CH_C. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B равен треугольнику $H_AH_BH_C$.

А.Акопян

5. На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход любую из них можно передвинуть на соседнюю клетку по вертикали или горизонтали (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения двух фишек, причем ровно по одному разу?

А.Шаповалов

6. В игре «Десант» две армии захватывают страну. Они ходят по очереди, каждым ходом занимая один из свободных городов. Первый город захватывается с воздуха, а каждым следующим ходом можно захватить любой город, соединенный дорогой с каким-то городом, уже занятым этой армией. Если таких нет, армия прекращает боевые действия (при этом, возможно, другая продолжает). Найдется ли такая схема городов и дорог, что армия, ходящая второй, сможет захватить более половины всех городов, как бы ни действовала первая? (Число городов конечно, каждая дорога соединяет ровно два города.)

П.Грозман, А.Шаповалов, Д.Шаповалов

11 класс

1. Существуют ли три квадратных трехчлена таких, что каждый имеет два различных действительных корня, а сумма любых двух трехчленов не имеет действительных корней?

А.Белов

2. Дана геометрическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что a_1, a_{10}, a_{30} – натуральные числа. Верно ли, что a_{20} – также натуральное число?

Фольклор

3. В неравнобедренном треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, I' – центр окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CB и CA; L и L' – точки, в которых сторона AB касается этих окружностей. Докажите, что прямые IL', $I'L$ и высота CH треугольника ABC пересекаются в одной точке.

А.Заславский

4. Докажите, что не существует многочлена $Q(x)$ степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом значении x является простым числом.

А.Белов

5. Докажите, что в пространстве существует 2001 выпуклый многогранник, никакие три из которых не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга (т.е. имеют хотя бы одну общую граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).

А.Белов

6. По кругу расставлено несколько коробочек, в которых лежат шарики (коробочка может быть и пустой). За один ход разрешается взять все шарики из какой-то коробочки и разложить их, начиная со следующей коробочки, двигаясь по часовой стрелке и кладя в каждую коробочку по одному шарику.

а) Докажите, что если шарики всегда берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков можно получить любое другое.

В.Гуровиц

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Напомним правила игры «Жизнь». На клетчатом листе стоит несколько фишек. Их расположение во всех клетках одновременно меняется следующим образом. Если в клетках, соседних с данной (по стороне или углу), стоит ровно 3 фишки, то в данную клетку ставится фишка (если ее не было). Если в соседних клетках более 3 или менее 2 фишек, то фишка снимается (если она была). Если в соседних клетках ровно 2 фишки, то состояние клетки не меняется.

Докажите, что в игре «Жизнь» на квадрате 2001×2001 существует конфигурация, не имеющая прообраза. (9) [2]

А.Белов

2. Единичный квадрат разбит на три многоугольника. Докажите, что диаметр хотя бы одного из них не меньше $\sqrt{65}/8$. (9)

Фольклор

---

[2] *В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*