пульса: $L_A = L_B$ дают уравнения

$$\omega_0 = \omega\left(1 - \frac{GM}{r_m c^2}\right),$$

$$b\omega_0 = r_m \omega,$$

где ω_0 – частота фотона в точке A, находящейся в бесконечности, ω – частота фотона в точке B на расстоянии r_m от центра звезды. Из первого уравнения непосредственно следует, что $\omega > \omega_0$ – так называемое фиолетовое гравитационное смещение. Из обоих уравнений получаем

$$r_m^2 - br_m + \frac{GMb}{c^2} = 0.$$

Если считать заданным прицельный параметр b, то

$$r_m = \frac{b}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2R_g}{b}}\right),$$

где $R_g = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус (или радиус Шварцшильда). Для обычных небесных тел $R_g/R = 2GM/(Rc^2) \ll 1$, т.е. поля тяготения являются слабыми. Например, гравитационный радиус Солнца равен $R_g = 2GM/c^2 \approx 3$ км, т.е. $R_g \ll R$.

Так как $b \gtrsim R$, то в приближении слабого поля можно записать

$$r_m = \frac{b}{2}\left(1 \pm \left(1 - \frac{R_g}{b}\right)\right),$$

или

$$r_{m1} = b\left(1 - \frac{R_g}{2b}\right) \text{ и } r_{m2} = \frac{R_g}{2}.$$

Очевидно, что второе решение не имеет смысла, поэтому окончательно получаем

$$r_m = b\left(1 - \frac{R_g}{2b}\right).$$

Аналогично, для угла отклонения θ находим

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{R_g}{2b} = \frac{GM}{bc^2}, \quad \theta \approx \frac{R_g}{b} = \frac{2GM}{bc^2}.$$

Как видим, в приближении слабого поля результаты, полученные с обеих точек зрения – классической и квантовой, – полностью совпадают.

Отметим, что в 1915 году расчет угла отклонения выполнил А.Эйнштейн. Согласно общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна, в поле гравитации (тяготения) изменяются законы геометрии и ход времени (искривление пространства – времени). Из уравнений ОТО следует, что траектория светового луча в слабом поле тяготения звезды определяется уравнением

$$\frac{b^2c^2/(GM)}{r} = 1 + \frac{bc^2}{GM}\cos\varphi + \sin^2\varphi.$$

Как видно, это уравнение отличается от уравнения траектории классической световой корпускулы членом $\sin^2\varphi$. Учитывая, что $\theta = -\pi + 2\varphi_m$, получаем формулу Эйнштейна для угла отклонения светового луча:

$$\theta = \frac{2R_g}{b} = \frac{4GM}{bc^2}.$$

Для луча, проходящего вблизи поверхности звезды ($b \approx R$), этот угол равен

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

В частности, для Солнца

$$\theta = 4GM/(Rc^2) \approx 1{,}75''.$$

Понятно, насколько важно было измерить угол θ. Результаты измерений должны были подтвердить (или опровергнуть) выводы ОТО об искривлении пространства – времени. Первые измерения удалось осуществить во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 года астрономам А.Эддингтону, Ф.Дайсону и К.Дэвидсону, которые организовали экспедиции в Бразилию и к берегам Африки. Сфотографировав звезды вблизи закрытого Луной Солнца, они измерили их смещения и рассчитали угол отклонения световых лучей. Он оказался в полном согласии с формулой Эйнштейна. В наше время угол θ измерен намного точнее путем радиоастрономических наблюдений (свет и радиоволны распространяются по тем же законам), не связанных с солнечными затмениями. Результаты измерений еще надежнее подтверждают теоретическую формулу.

ОТО включает в себя принцип соответствия, согласно которому в случае слабых полей и малых скоростей ($v \ll c$) все предсказания ОТО должны совпадать с предсказаниями ньютоновской теории. Последнее означает, что траектории (геодезические) нерелятивистских частиц «не чувствуют» кривизну трехмерного пространства. Но когда речь идет о траекториях фотонов, учет пространственной кривизны становится существенным. Можно сказать, что искривление траектории фотонов слагается из двух эффектов: эффекта изменения хода часов (искривление времени) и эффекта искривления пространства. При решении задачи в рамках ОТО автоматически учитываются оба эффекта, в результате для угла отклонения ОТО дает формулу, которая отличается от классической формулы множителем «2». Очевидно, что эта разница играет фундаментальную роль.

Задача 3. Звезда как гравитационная линза

Теория тяготения предсказывает, что любое гравитирующее тело (планета, звезда и т.п.) должно отклонять световые лучи. Следовательно, любое гравитирующее тело должно действовать наподобие оптической линзы, фокусируя световые лучи в некоторой точке F, называемой фокусом линзы.

Предположив, что звезда массой M и радиусом R является гравитационной линзой и действует так (или почти так), как действует обычная оптическая собирающая линза, оцените фокусное расстояние F такой линзы (рис.3).

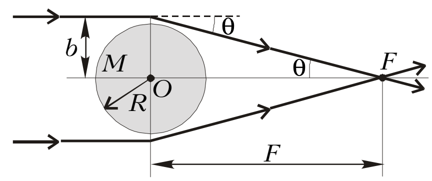

Рис. 3

Как видно из рисунка 3,

$$F = \frac{b}{\operatorname{tg}\theta}.$$

Воспользуемся результатами предыдущей задачи. В приближении слабого поля и с учетом малости угла θ получаем

$$F \approx \frac{b}{\theta} \approx \frac{b^2}{R_g} = \frac{b^2c^2}{2GM}.$$

При $b \approx R$

$$F \approx \frac{R^2}{R_g} = \frac{R^2c^2}{2GM}.$$

Для Солнца, например, $F \approx \approx 1{,}7 \cdot 10^{14}$ м. А так как расстояние от Земли до Солнца равно $l = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м, то $F \gg l$. Понятно, что наблюдать с Земли линзовый эффект в поле тяготения Солнца нельзя. С другой стороны, ближайшая к нам звезда Проксима Центавра находится от нас на расстоянии $l \approx 4 \cdot 10^{16}$ м $\gg F$. Следовательно, любая из удаленных звезд может стать гравитационной линзой. Необходимо только, чтобы источник излучения, звезда-линза и наблюдатель расположились на одной прямой.

(Окончание см. на с. 43)