Отклонение частиц и световых лучей полем тяготения

С. КОЖИНИН

Рассмотрим несколько интересных задач о движении классических частиц и фотонов в полях тяготения планет и звезд.

Задача 1. Рассеяние частицы полем Земли

На какой угол θ изменится направление скорости пролетающей мимо Земли метеорной частицы под действием поля земного тяготения (рис.1)? Скорость частицы на бесконечности равна v_∞. Влияние атмосферы Земли не учитывать.

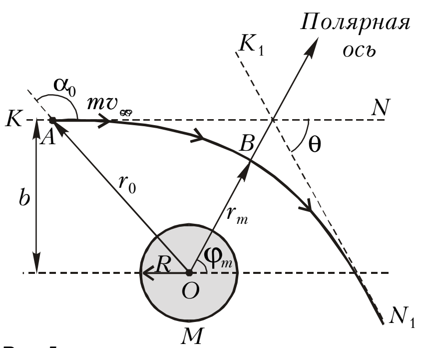

Рис. 1

При решении задачи учтем (без вывода), что частица движется по гиперболической траектории. Опираясь на геометрические свойства гиперболы, можно доказать, что угол рассеяния θ, прицельное расстояние b и расстояние r_m от центра планеты до ближайшей точки B траектории частицы связаны соотношением

$$\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{b^2 - r_m^2}{2br_m}. \qquad (1)$$

Действительно, гипербола – это геометрическое место точек, разность расстояний до которых от двух заданных точек O и O', называемых фокусами (рис.2), постоянна: $r_1 - r_2 = \mathrm{const}$. Один из фокусов гиперболы O совпадает с центром Земли, второй фокус O' лежит на прямой, проходящей через центр Земли и ближайшую к центру точку B траектории. На бесконечно больших расстояниях от Земли как при приближении, так и при удалении скорость частицы направлена по асимптоте гиперболы, поэтому задача состоит в нахождении угла θ между асимптотами. Точка пересечения асимптот лежит посередине между фокусами.

Приравняем разности расстояний от фокусов O и O' до бесконечно удаленной точки – это отрезок $O'C$ на рисунке 2 – и до ближайшей к центру Земли точки. Из треугольника $OO'C$ находим

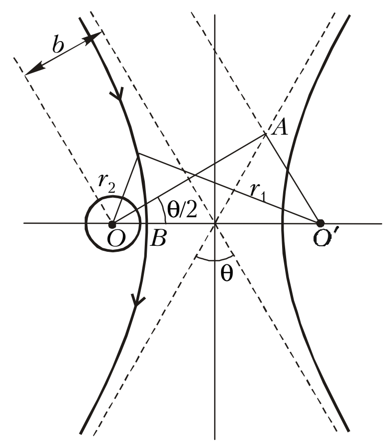

Рис. 2

$$OC = 2b,$$

$$O'C = 2b\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2},\quad OO' = \frac{2b}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Разность расстояний от фокусов до точки B составляет

$$BO' - BO = \left(OO' - BO\right) - BO,$$

где $BO = r_m$. Теперь условие равенства разности расстояний до выбранных точек можно записать в виде

$$2b\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{\cos\frac{\theta}{2}} - 2r_m.$$

Перенося $2r_m$ в левую часть, возводя обе части в квадрат и используя тождество

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \mathrm{tg}^2\,\theta,$$

получаем формулу (1).

Запишем теперь законы сохранения энергии E и момента импульса L частицы для участка AB ее траектории (см. рис.1):

$$E_A = E_B,\ L_A = L_B,$$

или

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2} - \frac{GMm}{r_m},\qquad bv_\infty = r_m v_m, \qquad (2)$$

где v_m – скорость частицы в точке B; мы учли, что точка A находится в бесконечности, поэтому $L_A = L_\infty = r_0 m v_\infty \sin\alpha_0 = bmv_\infty$, а $L_B = r_m m v_m \sin 90^\circ = r_m m v_m$. (Отметим, что вместо закона сохранения момента импульса можно использовать второй закон Кеплера.) Из равенств (2) получаем

$$r_m^2 + \frac{2GM}{v_\infty^2} r_m - b^2 = 0. \qquad (3)$$

Если считать заданным расстояние r_m, то для прицельного расстояния b находим

$$b = r_m\sqrt{1 + \frac{2GM}{r_m v_\infty^2}}.$$

Если считать заданным расстояние b, то для r_m находим

$$r_m = \frac{GM}{v_\infty^2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{bv_\infty^2}{GM}\right)^2} - 1\right). \qquad (4)$$

Для определенности будем считать известным прицельный параметр b. Тогда, с учетом (3), для угла рассеяния получаем

$$\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{GM}{bv_\infty^2}. \qquad (5)$$

Метеорная частица не задевает планету, если $r_m \gtrsim R$ (см. рис.1). При $r_m = R$ расстояние b оказывается минимальным и равным

$$b_{\min} = R\sqrt{1 + \frac{2GM}{Rv_\infty^2}} = R\sqrt{1 + \left(\frac{v_{2\text{к}}}{v_\infty}\right)^2},$$

где $v_{2\text{к}} = \sqrt{2GM/R}$ – вторая космическая (параболическая) скорость. При заданном значении v_∞ и минимальном прицельном расстоянии $b_{\min}$ угол отклонения (или угол рассеяния) макси-