Ортоцентрический треугольник

А.ЕГОРОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОГОВОРИМ о высотах треугольников.

Напомним прежде всего, что во всяком треугольнике высоты (точнее — прямые, на которых они лежат) пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром*.

Вот изящное доказательство этого факта. Возьмем произвольный треугольник ABC. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — его высоты. Через вершины A, B и C проведем прямые, параллельные противоположным сторонам (рис.1). В результате получится треугольник $A'B'C'$, стороны которого параллельны AB, BC и AC соответственно. Прямые, перпендикулярные $A'B'$ в точке C, $B'C'$ в точке A и $A'C'$ в точке B, т.е. серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A'B'C'$, пересекаются в точке H — центре описанной около $A'B'C'$ окружности. Но каждая из высот треугольника ABC лежит на одной из этих прямых.

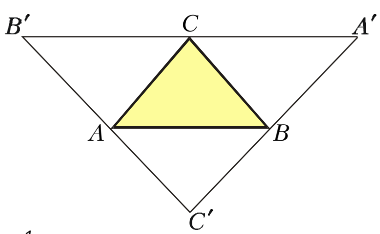

Рис. 1

Упражнение 1 (теорема Эйлера). Докажите, что во всяком треугольнике точка пересечения медиан M, центр описанной окружности O и ортоцентр H лежат на одной прямой, и найдите, в каком отношении точка M делит отрезок OH. *Указание*. Пусть A', B', C' — середины сторон треугольника ABC (рис.2), H — его ортоцентр, O — центр описанной окружности, а M — центр тяжести. Заметим, что точка O − ортоцентр треугольника $A'B'C'$, а при гомотетии с коэффициентом -2 и центром в точке M точки A', B', C' переходят в точки A, B и C соответственно, а точка O — в H.

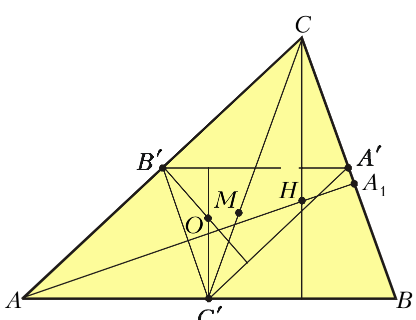

Рис. 2

При этом ортоцентр H лежит внутри треугольника ABC, если он остроугольный, и вне него, если ABC — тупоугольный треугольник (рис. 3, *а*, *б*). Для прямоугольного треугольника ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла (рис. 3, *в*).

Попутно отметим, что для тупоугольного треугольника ABC треугольник AHB (см.рис.3,*б*) — остроугольный с высотами AB_1, BA_1, HC_1 и ортоцентром C. Это замечание будет нам полезно в дальнейшем. Стоит также обратить внимание на то, что каждая из четырех точек A, B, C и H является ортоцентром треугольника, образованного остальными тремя точками.

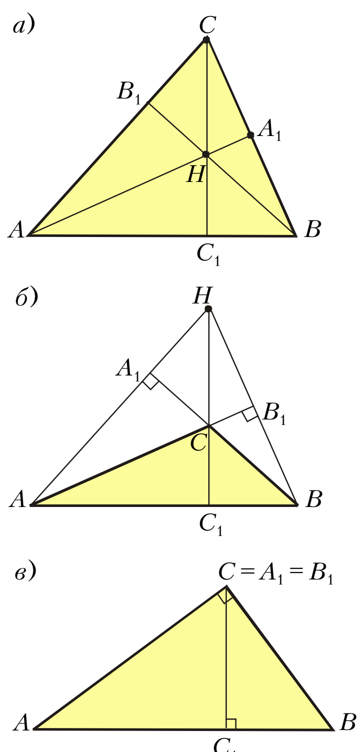

Рис. 3

Вспомогательная окружность

В дальнейшем будут использованы стандартные обозначения для сторон и углов треугольника: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Через R мы будем обозначать радиус описанной окружности, а через O — ее центр.

Начнем с задачи.

Задача. *Докажите, что треугольники A_1B_1C и ABC подобны.*

Рассмотрим сначала остроугольный треугольник ABC. Поскольку углы AA_1B и BB_1A — прямые, точки A, B_1, A_1 и B лежат на окружности с диаметром AB (рис.4,*а*). Поэтому $\angle B_1A_1B = \pi - \alpha$. Но это значит, что $\angle CA_1B_1 = \alpha$, и треугольники A_1B_1C и ABC подобны по третьему признаку подобия. Если же ABC тупоугольный

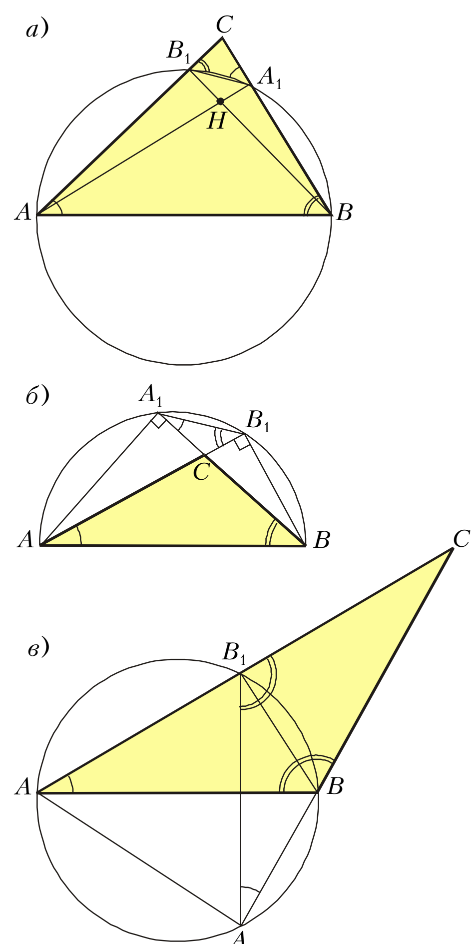

Рис. 4