влажность $\varphi = 50\%$. Найдите скорость u. Удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}2$ МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), давление насыщенных паров воды при нормальных условиях $p = 600$ Па, удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме $c_V = 720$ Дж/(кг·К), средняя молярная масса воздуха $\mathrm{M} = 0{,}029$ кг/моль.

С.Варламов

Ф1791. Одно колено гладкой изогнутой трубки с круглым внутренним сечением площадью S вертикально, а другое наклонено к горизонту под углом α (рис.2). В трубку налили жидкость плотностью ρ и массой M так, что ее уровень в наклонном колене выше, чем в вертикальном, которое закрыто легким поршнем, соединенным с вертикальной пружиной жесткостью k. Найдите период малых колебаний этой системы. Ускорение свободного падения равно g.

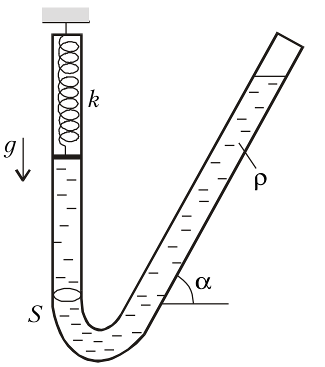

Рис.2

М.Семенов

Ф1792. Ацетон и бензол смешиваются друг с другом в любых пропорциях, образуя прозрачный раствор. Объем смеси равен суммарному объему компонентов до смешивания. Коэффициент преломления света в смеси n зависит от концентраций молекул ацетона $N_а$ и бензола $N_б$ следующим образом: $n^2 = 1 + K_а N_а + K_б N_б$, где $K_а$ и $K_б$ – некоторые константы (поляризуемости молекул ацетона и бензола). В колбе находится $V = 200$ мл смеси ацетона и бензола при температуре $t_1 = 50\ ^\circ\mathrm{C}$. Палочка из стекла, опущенная в колбу, освещается светом с длиной волны $\lambda = 546$ нм и не видна в этом растворе при данной температуре. Сколько миллилитров и какой жидкости – ацетона или бензола – нужно долить в колбу после ее охлаждения до температуры $t_2 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, чтобы после размешивания раствора стеклянная палочка не была видна при том же освещении? Коэффициенты преломления света с данной длиной волны у этих жидкостей при температуре t_2 равны $n_а = 1{,}36$ и $n_б = 1{,}50$ соответственно, а у стекла – $n_с = 1{,}47$. Коэффициенты объемного расширения обеих жидкостей в диапазоне температур от t_2 до t_1 одинаковы и равны $\alpha = 0{,}00124$ 1/К. Тепловым расширением стекла и испарением жидкостей пренебречь.

С.Варламов

Решения задач М1756—М1765, Ф1773—Ф1777

М1756. *Даны несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Докажите, что все числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое.*

Построим алгоритм раскраски наших чисел в два цвета. Расположим числа по убыванию. Возьмем наименьшее и окрасим его в первый цвет. Рассмотрим следующее число. Если оно делится на минимальное число первого цвета, то окрасим его в первый цвет, а иначе – во второй; получим, что минимальные числа двух цветов попарно не делят друг друга. Рассмотрим следующее число: оно делится хотя бы на одно из двух минимальных. Если ровно на одно, то, покрасив его в тот же цвет, получим предыдущую ситуацию. Если же следующее число делится на оба минимальных, то временно окрасим его в третий цвет. Если следующее число делится на минимальное число третьего цвета, то и его красим в третий цвет, и так далее, пока не встретится число, не делящееся на минимальное число третьего цвета. Рассмотрим это число и два минимальных числа первых двух цветов: новое число делится на одно из них, тогда покрасим новое число в этот цвет, а все числа третьего цвета – в другой цвет и опять получим ситуацию, когда два минимальных числа разного цвета не делят друг друга. Повторяя этот алгоритм, мы получим раскраску, требуемую в задаче.

Примечание. Данный факт является частным случаем теоремы Дилворта о частично упорядоченных множествах, которую в связи с этой задачей можно сформулировать так:

Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых n из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Тогда все числа можно покрасить в n – 1 цвет так, чтобы для любых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое.

Е.Черепанов

М1757*. *Выпуклый многоугольник можно разрезать на 20 параллелограммов. Докажите, что этот многоугольник можно разрезать на 15 параллелограммов.*

Решение задачи опирается на два вспомогательных утверждения. Первое из них представляет собой лемму Минковского.

Лемма 1. *Если выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то этот многоугольник обладает центром симметрии.*

Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться в том, что для каждой стороны многоугольника найдется равная и параллельная ей сторона.

Сначала разрежем параллелограммы разбиения на более мелкие параллелограммы так, чтобы новое измельченное разбиение многоугольника удовлетворяло следующему требованию: любые его два параллелограмма либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону целиком.

Пусть нижняя сторона AB исходного многоугольника M горизонтальна (рис.1). Будем строить из параллелограммов нового разбиения «дорожки», начинающиеся от стороны AB так, чтобы каждый следующий параллелограмм примыкал к предыдущему по горизонтальной его стороне. Ясно, что последний параллелограмм каждой дорожки будет примыкать к верхней горизонтальной стороне CD многоугольника M. Одним словом, сторона CD будет параллельна стороне AB и будет иметь ту же длину.

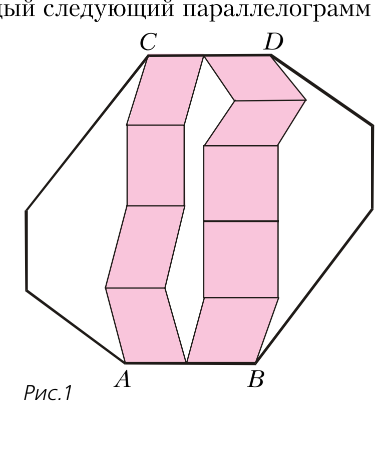

Рис.1

Теперь сформулируем и