налям данного четырехугольника, равна нулю, то этот четырехугольник может быть получен ортогональным проектированием правильного тетраэдра.

Вновь впишем тетраэдр в куб, как на рисунке 7. Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – векторы, лежащие на трех выходящих из одной вершины ребрах куба, w_1, w_2, w_3 — комплексные числа, соответствующие проекциям этих векторов. Тогда из двух противоположных ребер тетраэдра, лежащих, например, в гранях куба, образованных векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, одно задает вектор $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, другое $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$. При переходе к проекциям эти соотношения сохраняют силу, и, значит, сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих этим ребрам, равна

$$(w_1 + w_2)^2 + (w_1 - w_2)^2 = 2(w_1^2 + w_2^2),$$

а сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих всем ребрам тетраэдра, равна $4(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$. Поэтому наше утверждение равносильно следующему:

Утверждение 2. *Три вектора на плоскости могут быть получены как ортогональные проекции трех непараллельных ребер куба тогда и только тогда, когда сумма квадратов соответствующих им комплексных чисел равна нулю.*

Доказательство. Докажем сначала лемму.

Лемма. Пусть *данные векторы плоскости имеют координаты* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). *Для того чтобы они были проекциями трех ребер куба, необходимо и достаточно, чтобы существовали три числа* z_1, z_2, z_3, *удовлетворяющие условиям*

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2, \quad (1)$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0. \quad (2)$$

Для доказательства леммы будем считать, что одна из вершин куба совпадает с началом координат плоскости проекции, а смежные с ней проектируются в точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Введем в пространстве систему координат, оси x и y которой совпадают с координатными осями плоскости проекции, а ось z перпендикулярна этой плоскости. Тогда три смежные с началом координат вершины куба будут иметь координаты (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) при некоторых z_1, z_2, z_3. Для того чтобы три вектора с такими координатами были ребрами куба, необходимо и достаточно, чтобы их длины были равны и они были попарно перпендикулярны. Первое условие равносильно соотношениям (1), второе — соотношениям (2).

Исключим теперь из условий (1), (2) z_1, z_2, z_3. Для этого перенесем в (2) произведения z_iz_j в правую часть и разделим произведение двух из получившихся уравнений на третье. Получим, например, что

$$z_1^2 = -(x_1x_2 + y_1y_2)(x_1x_3 + y_1y_3)/(x_2x_3 + y_2y_3).$$

Если, например, $x_2x_3 + y_2y_3 = 0$, то векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ перпендикулярны, и один из них является ребром куба (см. упражнение 5). Разбор этого случая не представляет трудности. Подставив выражение для z_1^2 и аналогичные выражения для z_2^2, z_3^2 в (1), получим два соотношения, которым должны удовлетворять исходные координаты. После преобразований эти соотношения принимают вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0.$$

Следовательно,

$$(x_1 + iy_1)^2 + (x_2 + iy_2)^2 + (x_3 + iy_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + i(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = 0.$$

Утверждение доказано.

Проекции правильных многогранников

Из утверждения 2 следует, что для тетраэдра и куба сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих проекциям ребер, равна нулю. Докажем, что для остальных правильных многогранников это также справедливо. Прежде всего, отметим, что октаэдр можно получить, отрезав от тетраэдра с ребром 2 четыре тетраэдра с ребром 1 (рис.8). Ребра полученного октаэдра будут параллельны ребрам исходного тетраэдра, так что для них утверждение тоже будет справедливо. Чтобы доказать его для додекаэдра и икосаэдра, рассмотрим пять вписанных в додекаэдр кубов, один из которых показан на рисунке 9. Из рисунка видно, что три пары ребер додекаэдра и три пары отрезков, соединяющих центры его граней (т.е. ребер икосаэдра), параллельны ребрам куба. Все множество ребер разбивается на пять таких наборов, для каждого из которых сумма квадратов соответствующих комплексных чисел равна нулю по утверждению 2.

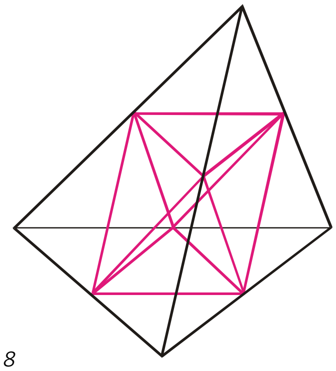

Рис.8

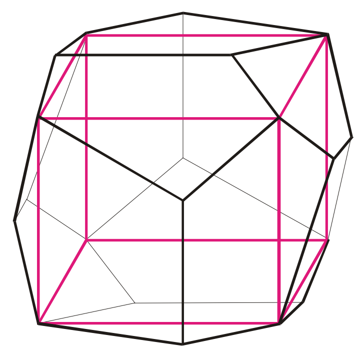

Рис.9

Это рассуждение показывает, что в случае додекаэдра и икосаэдра условие равенства нулю суммы квадратов не является достаточным, так как нулю должна равняться не только сумма по всему множеству ребер, но и по некоторым его подмножествам.

В заключение отметим еще одно свойство ортогональных проекций правильных многогранников: сумма квадратов длин проекций ребер не зависит от плоскости проекции. Для куба это немедленно следует из того, что сумма квадратов косинусов углов, образуемых тремя непараллельными ребрами куба с произвольной прямой, равна единице. Для остальных многогранников утверждение доказывается аналогично утверждению 2.