конечную цепную дробь, например

$$\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-1=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=$$

$$=1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}=\ldots$$

$$\ldots=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ldots}}}}}}.$$

Можно доказать, что если «оборвать» цепную дробь в том или ином месте, то получим наилучшее приближение соответствующего числа. (Наилучшее – в некотором точном смысле, который я не буду здесь объяснять, надеясь, что это послужит поводом для серьезного знакомства с цепными дробями – например, по книжке А.Я.Хинчина «Цепные дроби»[1].)

Начнем с наипроизвольнейшего прямоугольного треугольника. Его острые углы, помнится, 30° и 60°, поэтому отношение катетов равно

$$\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}=1+\sqrt{3}-1=$$

$$=1+\frac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)/2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)/2}}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ldots}}}}}}}.$$

«Обрывая» эту дробь в разных местах, получаем все более точные приближения числа $\sqrt{3}$ обыкновенными дробями:

$$1+\frac{1}{1}=2,$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}=\frac{7}{4},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{19}{11}$$

(дальше не выписываю, поскольку числитель и знаменатель получаются слишком большие для тетрадной страницы). Поэтому имеет смысл строить прямоугольный треугольник с катетами 19 и 11 клеток. Неплох и треугольник с катетами 7 и 4 (а также подобные ему – 14 и 8 или 21 и 12), отличие углов от 30° и 60° всего лишь около 1°.

Лично мне из вышеперечисленных больше всего нравится треугольник с катетами 14 и 8 – он не слишком велик, и его стороны легко поделить пополам (например, если потребуется провести медиану). Впрочем, это зависит от конкретной решаемой задачи.

Следующий в таблице – треугольник с углами 67,5°, 67,5° и 45°. Поскольку

$$1=\operatorname{tg}45^\circ=\frac{2\operatorname{tg}22{,}5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 22{,}5^\circ},$$

то, решив квадратное уравнение

$$\operatorname{tg}^2 22{,}5^\circ+2\operatorname{tg}22{,}5^\circ-1=0,$$

находим

$$\operatorname{tg}22{,}5^\circ=\sqrt{2}-1,$$

так что

$$\operatorname{tg}67{,}5^\circ=\operatorname{ctg}22{,}5^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$$

Число $\sqrt{2}$ мы уже разложили в цепную дробь. Поэтому для числа $\operatorname{tg}67{,}5^\circ$ сразу выписываю подходящие дроби:

$$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},\quad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{12}{5},$$

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{29}{12},\ldots$$

Последнее приближение едва умещается на тетрадной странице, а предпоследнее дает нам равнобедренный

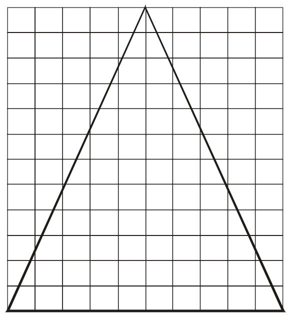

Рис. 18

треугольник с высотой 12 клеток и основанием $2\cdot 5=10$ клеток (рис. 18). При необходимости размеры можно увеличить вдвое.

Следующий треугольник – равнобедренный с углом при основании 54°. Тангенс этого угла в явном виде вычислить сложнее, чем $\operatorname{tg}60^\circ$. Но можно бесхитростно вычислить его на калькуляторе и затем разложить в цепную дробь:

$$\operatorname{tg}54^\circ=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{\ldots}}}}}}.$$

Обратите внимание – эта цепная дробь как будто сама указывает, где ее лучше оборвать:

$$\operatorname{tg}54^\circ\approx1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{11}{8}.$$

Соответствующий равнобедренный треугольник имеет высоту 11 клеток и

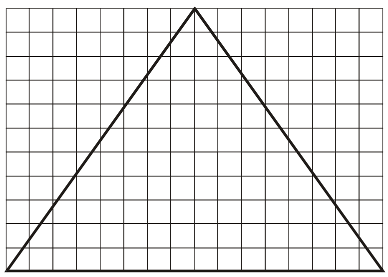

Рис. 19

основание $2\cdot 8=16$ клеток (рис.19).

Следующий треугольник – равнобедренный с углом при основании 30°. С ним нет проблем, ибо он состоит из двух уже «обсчитанных» нами прямоугольных треугольников с углами 30° и 60°, сложенных меньшими катетами. В результате получается равнобедренный треугольник с высотой 4 клетки и основанием $2\cdot 7=14$ клеток (рис.20).

---

[1] *См. также статьи Д.Фукса, М.Фукса «О наилучших приближениях» («Квант» №11 за 1971 г.) и Ю.Нестеренко, Е.Никишина «Очерк о цепных дробях» («Квант» №5, 6 за 1983 г.). (Прим. ред.)*