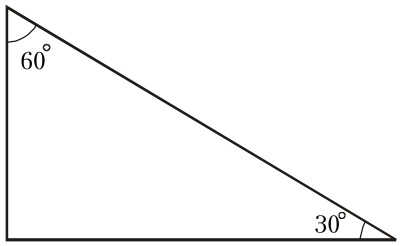


**Рис. 4**

ник с углами 30°, 60° и 90° (рис.4). Так сказать, он не низок, не высок, он не узок, не широк. Гармония! Наверное, примерно такого результата вы ждали, но одно дело – предчувствовать, а другое дело – владеть точным доказательством.

## Равнобедренный треугольник

Задачу поиска самого произвольного равнобедренного треугольника я разобью на три разные задачи: найти самый произвольный

1) тупоугольный равнобедренный треугольник;

2) равнобедренный треугольник, угол при вершине которого меньше угла при основании;

3) остроугольный равнобедренный треугольник, угол при вершине которого больше угла при основании.

Рассмотрим их по очереди.

**Равнобедренный тупоугольный треугольник.** Пусть $\alpha$ – угол при основании, $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ – угол при вершине, причем $\beta > 90^\circ$. Тогда $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Если мы хотим, чтобы углы $\alpha$ и $\beta$ треугольника как можно сильнее отличались друг от друга, то должны выбрать $\alpha \in \left(0^\circ, 45^\circ\right]$ так, чтобы величина $\beta - \alpha = 180^\circ - 3\alpha$ была бы максимальной.

Мы столкнулись с неприятностью: чем меньше $\alpha$, тем больше $180^\circ - 3\alpha$, но выбрать $\alpha = 0^\circ$ нельзя: сколь угодно малым $\alpha$ может быть, а нулем – не может!

Что же получается? Самый-самый красивый тупоугольный равнобедренный треугольник не существует, и мы можем лишь приблизительно нарисовать его, взяв $\alpha \approx 0^\circ$? Да нет, что-то не то. Скорее всего, мы решили не ту задачу. Наверное, не надо позволять углу $\alpha$ быть слишком маленьким. (Можно было бы еще потребовать, чтобы $\beta$ не слишком приближалось к $180^\circ$, но это получится само собой, поскольку $180^\circ - \beta = 2\alpha$.) Итак, попробуем найти $\alpha \in \left(0^\circ, 45^\circ\right)$, при котором наименьшая из величин $\alpha$ и $180^\circ - 3\alpha$ была бы как можно больше.

Поскольку при $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ верно неравенство

$$\alpha < 180^\circ - 3\alpha,$$

то при рассматриваемых $\alpha$ имеем

$$\min\left(\alpha, 180^\circ - 3\alpha\right) = \alpha,$$

и ответа на поставленный нами вопрос, строго говоря, опять нет: можно брать $\alpha$ сколь угодно близким к 45°,

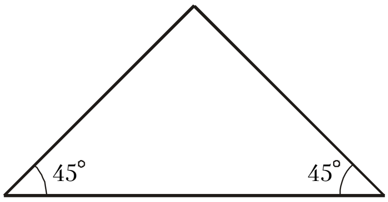


**Рис. 5**

но в точности 45° – нельзя, треугольник получается прямоугольным (рис.5).

Не знаю как вам, а мне это не нравится: в глубине души хотелось, чтобы треугольник отличался от прямоугольного. Поставлю новую задачу: найти такое $\alpha \in \left(0^\circ, 45^\circ\right)$, чтобы наименьшая из величин $\alpha$ и $\beta - 90^\circ = 90^\circ - 2\alpha$ была как можно больше. Формулой это записывается так:

$$\max_{0^\circ < \alpha \le 45^\circ} \min\left(\alpha, 90^\circ - 2\alpha\right).$$

Эту задачу мы уже решали – как помните, максимум достигается при $\alpha = 30^\circ$. При этом $\beta = 120^\circ$. Треугольник с такими углами изображен на рисунке 6.

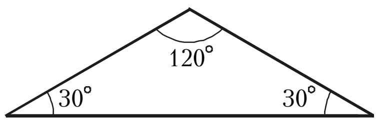


**Рис. 6**

Итак, задаче о самом произвольном равнобедренном тупоугольном треугольнике мы дали три разные математически точные формулировки. В двух из них определенного ответа нет ($\alpha \approx 0^\circ$, $\beta \approx 180^\circ$ или $\alpha \approx 45^\circ$, $\beta \approx 90^\circ$), а в третьей $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Является ли последний ответ единственно правильным? Нет: вполне возможна ситуация, в которой вас будут интересовать совсем другие величины, и тогда задачу о самом произвольном равнобедренном тупоугольном треугольнике придется решать заново!

**Угол при вершине меньше угла при основании.** Пусть по-прежнему $\alpha$ – угол при основании, $\beta$ – угол при вершине, причем $\alpha > \beta$. Поскольку

$$90^\circ - \frac{\beta}{2} = \alpha > \beta,$$

то $90^\circ > \frac{3}{2}\beta$, откуда $\beta < 60^\circ$. Если интересоваться величиной

$$\max_{\substack{0^\circ < \beta < 60^\circ \\ \alpha = \left(180^\circ - \beta\right)/2}} \min\left(\beta, \alpha - \beta\right) = \max_{0^\circ < \beta < 60^\circ} \min\left(\beta, 90^\circ - \frac{3}{2}\beta\right),$$

то ответ легко найти, построив сначала графики $y = x$ и $y = 90 - \frac{3}{2}x$ (рис.7), затем (красным цветом)

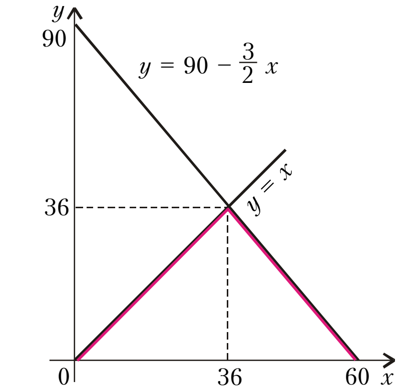


**Рис. 7**

$y = \min\left(x, 90 - \frac{3}{2}x\right)$. Максимум достигается при $x = 36$. Значит, самый произвольный равнобедренный треугольник, угол при вершине которого меньше угла при основании,– это треугольник с углами 72°, 72° и 36° (рис.8).

Но все не так просто. Если мы рассмотрим

$$\max_{\substack{0^\circ < \beta < 60^\circ \\ \alpha = \left(180^\circ - \beta\right)/2}} \min\left(\beta, \alpha - \beta, 90^\circ - \alpha, 90^\circ - \beta\right),$$

то, построив графики $y = x$, $y = 90 - \frac{3}{2}x$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 90 - x$

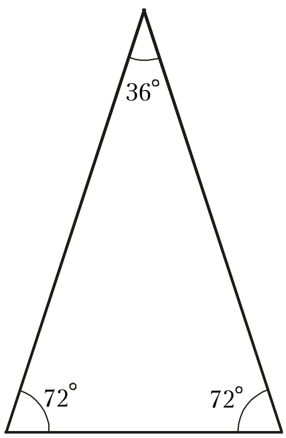


**Рис. 8**