Самый произвольный треугольник

И.АКУЛИЧ

Он был настолько типичен, что этим выделялся.

Нередко встречаются задачи, в которых фигурирует некий произвольный треугольник (возможны варианты: произвольный остроугольный, произвольный тупоугольный, произвольный равнобедренный, произвольный прямоугольный и т.п.). Чертеж к условию чаще всего не прилагается. И тогда перед вдумчивым школьником встает проблема: как нарисовать *произвольный* треугольник? (Не слишком вдумчивый не станет ломать голову – нарисует что-нибудь и будет вполне доволен результатом: чего вы, дескать, хотели – сказано «произвольный», вот я и нарисовал произвольный; а что на чертеже ничего не разберешь – досадная случайность!)

Для лучшего осмысления вопроса начнем с довольно простого случая прямоугольного треугольника. Вряд ли у кого язык повернется назвать произвольным равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 1). Да и у треугольника, изображенного на рисунке 2, гипотенуза вследствие малости одного из катетов весьма близка к другому катету, так что треугольник … тоже почти равнобедренный!

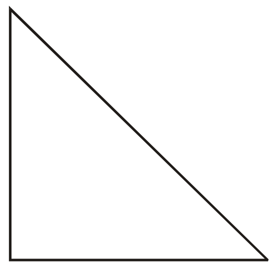

Рис. 1

Рис. 2

Наверное, теперь стало немного яснее, чего мы хотим: треугольник должен быть не слишком «экстремальным», а «средним», «типичным», удобным для работы.

Как известно, у треугольника три стороны и три угла. Что касается сторон, то их длины ограничены размерами листа бумаги. И хотя полезно рисовать большие чертежи (попытка экономить бумагу приведет лишь к тому, что задачу с первого раза не решишь и придется сделать не один-два, а много чертежей), но форма треугольника определяется, несомненно, величинами углов. Что сие означает в случае прямоугольного треугольника? Давайте разбираться.

Прямоугольный треугольник

Обозначим величины острых углов прямоугольного треугольника буквами α и β. Разумеется, $\alpha+\beta=90^\circ$. Можно считать, что $\alpha\le\beta$. Чтобы треугольник был как можно меньше похож на равнобедренный, потребуем, чтобы величины его углов как можно сильнее отличались друг от друга. Это означает, что α должно как можно сильнее отличаться от β, а β – от 90°. Иначе говоря, мы хотим найти такие α и β, чтобы разности $\beta-\alpha$ и $90^\circ-\beta$ были побольше. (Интересно, а мы ничего не забыли? Неравнобедренный – это хорошо, а вдруг треугольник будет такой «худой», как на рисунке 2? Может быть, нужно было еще попросить, чтобы угол α не был слишком маленьким? Нет, $\alpha=90^\circ-\beta$, так что ничего нового это условие не дало бы.)

Но задача все еще не получила точной формулировки. Как можно одновременно следить за двумя величинами? Что лучше: $\alpha=11^\circ$ и $\beta=79^\circ$, когда $\beta-\alpha=68^\circ$ и $90^\circ-\beta=11^\circ$, или $\alpha=28^\circ$ и $\beta=62^\circ$, когда эти разности равны 34° и 28°?

Чтобы не запутаться в бесплодных спорах, давайте вместо двух величин $\beta-\alpha$ и $90^\circ-\beta$ будем следить за одной – за *минимальной* из них, т.е. за величиной $\min(\beta-\alpha,\ 90^\circ-\beta)$. (А почему не за их произведением, не за суммой квадратов или не за суммой двадцатых степеней? Потерпите немного – к концу статьи и сумму квадратов к делу приспособим. А вот до двадцатых степеней очередь не дойдет.) Это значит, что мы будем искать такие α и β, для которых максимально велика величина $\min(\beta-\alpha,\ 90^\circ-\beta)$. (При этом, не забывайте, $0^\circ<\alpha\le\beta$ и $\alpha+\beta=90^\circ$.)

Поскольку $\alpha=90^\circ-\beta$ и $\beta-\alpha==90^\circ-2\alpha$, то задачу можно переформулировать следующим образом: найти такое $\alpha\in\left(0^\circ;45\right]$, для которого величина $\min(\alpha,\ 90^\circ-2\alpha)$ – наибольшая возможная.

Проще всего решить эту задачу графически: на рисунке 3 изображены графики функций $y=x$ и $y=90-2x$, а красным цветом – график $y==\min(x,\ 90-2x)$. Очевидно, максимум последней функции достигается в точке $x=30$.

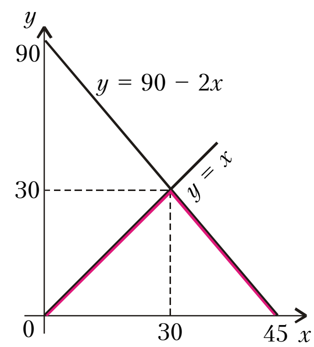

Рис. 3

Впрочем, можно было обойтись и без графиков. При $0^\circ<\alpha\le30^\circ$ имеем

$$\min(\alpha,\ 90^\circ-2\alpha)\le\alpha\le30^\circ,$$

а при $30^\circ<\alpha\le45^\circ$ имеем

$$\min(\alpha,\ 90^\circ-2\alpha)\le90^\circ-2\alpha<30^\circ.$$

Следовательно,

$$\max_{0^\circ<\alpha\le45^\circ}\min(\alpha,\ 90^\circ-2\alpha)=30^\circ,$$

причем максимум достигается при $\alpha=30^\circ$.

Итак, самый произвольный прямоугольный треугольник – это треуголь-