Приведя в нем подобные члены и сократив на h, он получает $a = 2x + h$, затем, отбросив слагаемое h, находит, как он говорит, «истинное равенство» $x = a/2$. Задача решена.

Приведем теперь рассуждения Ферма в общем виде для произвольного многочлена $P(x)$. Дадим аргументу x малое приращение h и найдем $P(x+h)$. Если x – точка экстремума, то $P(x) = P(x+h)$, или $P(x+h) - P(x) = 0$, – «вымышленное» равенство. Поделив на h, придем к равенству

$$\frac{P(x+h)-P(x)}{h} = 0.$$

Отбросив в нем слагаемые, содержащие h, получим уравнение, определяющее точку экстремума. Для произвольной дифференцируемой в точке x функции рассуждения Ферма могут быть записаны следующим образом:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0,$$

т.е. производная в точке экстремума равна нулю. Это и есть необходимое условие наличия в точке x локального экстремума, получившее название *теоремы Ферма.*

Сам Ферма отлично понимал недостаток своих рассуждений: сначала приращение h отлично от нуля, поэтому на него можно делить обе части равенства, а затем оно фактически полагается равным нулю. Для избежания возникшего противоречия он в одном из писем (1643) приводит алгебраическое обоснование своей теоремы. Мы на нем останавливаться не будем, как и на описании способа Ферма проведения касательных к кривым.

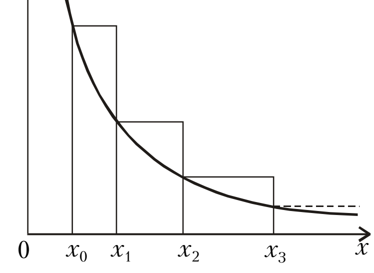
Отметим лишь, что задачу отыскания касательных он «приводит к вышеизложенному методу», имея в виду способ «приравнивания». Декарт придрался к этой фразе, считая, что под «вышеизложенным методом» подразумевается нахождение отрезка наибольшей длины. Такое «непонимание» объясняется просто: незадолго перед этим Ферма послал Мерсенну некоторые критические замечания по поводу «Диоптрики» Декарта. Развернулась бурная полемическая переписка, в которой приняли участие многие ведущие математики того времени. В этой переписке, похоже, один Ферма сохранял ровный тон, обстоятельно разъясняя свою идею. Полемика не добавила славы Декарту, но самой математике пошла на пользу: она привлекла внимание ученых к зарождавшемуся исчислению, обогатила математику решением ряда новых задач на экстремум и уточнением понятия касательной.

В методе Ферма уже содержалась суть дифференциального исчисления, созданного в XVII в. И.Ньютоном и Г.Лейбницем. Недаром Ньютон писал: «Намек на метод я получил из способа Ферма проведения касательных, применяя его к абстрактным уравнениям, я сделал его общим».

1629 г. был очень плодотворным для Ферма. Примерно тогда же он вычислил квадратуру параболы $y = x^n$ при натуральном показателе n. Для этого он разбил отрезок интегрирования на равные части и нашел, по сути дела, предел соответствующей интегральной суммы. Но перенести такой способ на случай рационального показателя ему не удалось, и тогда он придумал делить участок интегрирования не на равные части, а на отрезки, длины которых образуют геометрическую прогрессию. В записке «О преобразовании уравнений мест … в применении к параболам и гиперболам» (ок. 1664) он изложил свой метод для кривых $y = x^p$ с любым рациональным показателем, продемонстрировав его на конкретных примерах. Способ настолько хорошо просматривается на этих примерах, что не представляет труда перенести его на случай степенной функции с произвольным рациональным показателем, о чем писал сам Ферма.

Приведем рассуждения Ферма при вычислении площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = x^{-2}$ на промежутке $[a, +\infty)$.

Промежуток интегрирования он разбивает на частичные отрезки бесконечной последовательностью точек $a = x_0, x_1, x_2, \ldots$ (см. рисунок) таким образом, чтобы $x_1 : x_0 = x_2 : x_1 = x_3 : x_2 = \ldots = q$, где q – фиксированное число, большее единицы. Тогда $x_k = q^k a$, ординаты y_k соответствующих точек гиперболы равны $\frac{1}{q^{2k}a^2}$. Вычислим площадь S_k прямоугольника с основанием $[x_k, x_{k+1}]$ и высотой y_k:



$$S_k = q^k a(q-1)\frac{1}{q^{2k}a^2} = \frac{q-1}{q^k a}.$$

Суммарную площадь всех прямоугольников легко найти, используя формулу суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{q} < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k = \frac{q-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q^k} = \frac{q}{a}.$$

Если теперь в этом выражении перейти к пределу при $q \to 1$ (сам Ферма просто полагал $q = 1$), тогда все частичные отрезки стянутся в точки, и в результате получится искомая площадь бесконечной трапеции $S = \frac{1}{a}$.

Таким образом, в работах Ферма присутствовали не только интегральные суммы, но фактически и сами интегралы. Для создания математического анализа не хватало еще одного важного звена – установления связи дифференциальных и интегральных методов. Но это уже было задачей для следующего поколения ученых.

Теория вероятностей

В 50-х годах Ферма уже был известен в Европе как один из самых сведущих и авторитетных математиков. Именно к нему обратился с письмом Б.Паскаль за поддержкой своего способа решения задачи о справедливом разделе ставки. Сформулируем эту задачу. Два игрока делают ставку (вносят одинаковую сумму денег) и договариваются играть до тех пор, пока кто-либо из них первым не выиграет определенное заранее число партий. Победитель получает всю ставку. Предположим, что игра была прервана. Как справедливо разделить ставку между игроками?

К Паскалю с этим вопросом обратился кавалер де Мере – один из