Теперь мы в состоянии дать эффективный способ вычисления индекса многоугольника P. Пусть, наряду с P, построена близкая к ней гладкая кривая L, как на рисунке 16. Выберем произвольно направленный луч l, с единственным требованием, чтобы он не был параллелен ни одной из сторон многоугольника P, и из каждой вершины $M_i \in P$ выпустим луч l_i, сонаправленный с l. Затем посмотрим, попал ли этот луч внутрь угла Q_i, определяемого продолжением стороны $M_{i-1}M_i$ за точку M_i и лучом M_iM_{i+1} (угол Q_i определяется однозначно условием, что его величина всегда меньше π, и его ориентация совпадает с направлением его вращения в сторону луча M_iM_{i+1}). Если он туда попал, то приписываем вершине M_i число +1 или −1, в зависимости от того, $\alpha_i < \pi$ или $\alpha_i > \pi$, или, что то же самое, в зависимости от положительности или отрицательности ориентированного угла Q_i; если же l_i попал во внешность этого угла, приписываем вершине M_i число 0. После того как каждая вершина получит свое число, сложим эти числа. Полученная сумма Σ будет равна степени отображения кривой L на окружность по касательным векторам, а эта степень, как мы уже знаем, как раз равна индексу кривой, который, в свою очередь, равен индексу многоугольника P.

Упражнения

4. Докажите, что степень отображения кривой L на окружность по касательным к ней векторам действительно равна полученной сумме Σ.

5. Пусть луч l выбран так, что он оказался параллельным одной или нескольким сторонам многоугольника P. Проведем те же построения, что и выше, когда он выбирался не параллельным ни одной из сторон P, и припишем вершинам те же числа, если выполнены условия предыдущего рассуждения. Какие числа $(+1, 0, -1)$ надо приписать вершине M_i, если луч l_i совпадает с одной из сторон угла Q_i, для того чтобы сумма Σ приписанных всем вершинам чисел снова равнялась степени отображения кривой L на окружность?

Некоторые примеры и приложения

1) Пусть n-угольник P не имеет самопересечений, тогда сумма его углов в определенном выше смысле равна $\pi(n-2)$. Доказательство этого равенства на основании формулы (5) тривиально, если знать, что индекс гладкой замкнутой кривой без самопересечений (такие кривые называют *жордановыми*), обходимой в положительном направлении, равен 1. Интересное в этом утверждении состоит, конечно, в том, что оно верно для любых, в том числе и для невыпуклых, жордановых многоугольников (поэтому, например, сумма углов в многоугольнике рисунка 1, имеющем 28 сторон, равна 26π, даже если углы брать не обязательно в 90°). Но, вообще говоря, само утверждение об индексе жордановой кривой доказывается не очень просто, поэтому мы поступим наоборот: докажем, независимо от формулы (5), что сумма углов жорданова n-угольника равна $\pi(n-2)$, и отсюда выведем, что *индекс жорданова многоугольника равен 1* (при условии, что обход многоугольника оставляет его внутренность слева). Для этого нам все же придется воспользоваться двумя фактами, формально не входящими в школьный курс геометрии, а именно, нам нужно знать: а) что любой жорданов многоугольник разбивает плоскость на две области – на *внутренность* и *внешность* многоугольника (это утверждение называется теоремой Жордана) и б) что если некоторая область, ограниченная *одним* многоугольником, *триангулирована*, т.е. разбита на треугольники так, что любые два треугольника триангуляции или вовсе не пересекаются, или их пересечение состоит из одной общей вершины или же из одного общего ребра, то числа N – число всех вершин, E – число всех ребер и T – число всех треугольников триангуляции связаны *формулой Эйлера*

$$N - E + T = 1. \qquad (6)$$

Итак, пусть нам дан n-угольник P без самопересечений и пусть область D – внутренность этого многоугольника – разбита на T треугольников (рис.20). Пусть среди вершин этих треугольников внутри области D имеется $n_{\text{вн}}$ вершин, а на границе, кроме n вершин самого многоугольника, имеется еще $n_{\text{гр}}$ вершин. Тогда число E всех сторон треугольников триангуляции равно сумме $n + n_{\text{гр}} + E_{\text{вн}}$, где $E_{\text{вн}}$ – число ребер внутри D (на рисунке 20 $n = 9$, $n_{\text{гр}} = 4$, $E_{\text{вн}} = 16$, $T = 15$). Сумма углов треугольников равна πT, и она складывается из $2\pi n_{\text{вн}}$ – суммы углов при внутренних вершинах, $\pi n_{\text{гр}}$ – суммы углов при добавленных вершинах на границе, и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – суммы внутренних углов при вершинах многоугольника. Поэтому с учетом формулы Эйлера (6) и значений N и E имеем

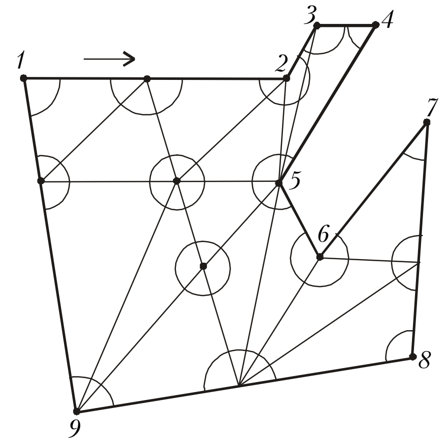

Рис.20

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi\left(T - 2n_{\text{вн}} - n_{\text{гр}}\right) =$$

$$= \pi\left(1 - 3n_{\text{вн}} + E_{\text{вн}} - n_{\text{гр}}\right). \quad (7)$$

Теперь вычислим число сторон по-другому. В T треугольниках имеется $3T$ сторон, но каждая сторона внутри области считается два раза, так как к ней примыкают два треугольника. Поэтому $3T = n + n_{\text{гр}} + 2E_{\text{вн}}$. Подставим это значение T в (6) и получим

$$3\left(n + n_{\text{гр}} + n_{\text{вн}}\right) - 3\left(n + n_{\text{гр}} + E_{\text{вн}}\right) +$$

$$+ \left(n + n_{\text{гр}} + 2E_{\text{вн}}\right) = 3,$$

откуда имеем, что $E_{\text{вн}} = 3n_{\text{вн}} + n + n_{\text{гр}} - 3$. Теперь из (7) получаем $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \pi(n-2)$, что вместе с (5) дает искомое равенство $Ind_P = 1$.

2) Вычислим сумму углов многоугольника, изображенного на рисунке 2. Пусть обход многоугольника идет от вершины M_1 в сторону M_2 и далее. Выберем луч l, направленный вертикально вверх, и нарисуем сонаправленные с ним лучи l_i в каждой вершине многоугольника и продолжения сторон в сторону обхода, чтобы были видны углы Q_i при вершинах M_i, как это описывалось в предыдущем пункте. Из рисунка 21 видно, что числа при вершинах от M_1 до M_7 должны быть следующие: 0, −1, 0, 0, 0, 0, 0. Следовательно,