Чему равна сумма углов многоугольника?

И. САБИТОВ

Каждый старшеклассник скажет, что сумма внутренних углов плоского n-угольника равна $\pi(n-2)$, а сумма его внешних углов равна 2π. Однако приводимые в учебниках доказательства относятся, как правило, только к выпуклым многоугольникам. Мы же хотим найти сумму углов *любого* многоугольника, скажем такого невыпуклого многоугольника, как на рисунке 1, или даже

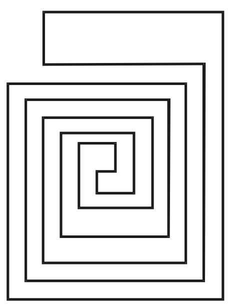

Рис.1

такого, как на рисунке 2, т.е. имеющего самопересечения. Ясно, что

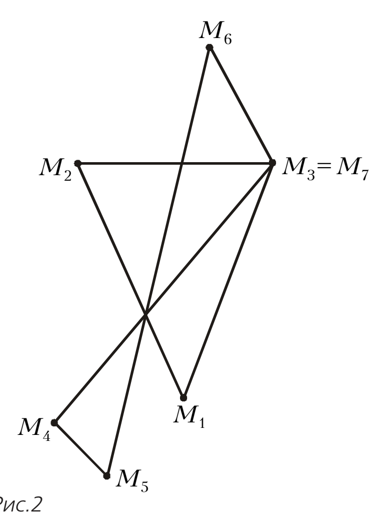

Рис.2

Иллюстрация Е.Силиной

рассмотрение общего случая нужно начинать с точных определений.

Определения

Пусть на плоскости П дана единичная окружность Г с отмеченными на ней n точками, $n \geq 3$. Перенумеруем их по порядку, следуя обходу окружности против часовой стрелки, и обозначим их как $M_1^*, \ldots, M_n^*$. Сопоставим теперь каждой точке $M_i^* \in \Gamma$, $1 \leq i \leq n$, по некоторому правилу f точку $M_i = f\left(M_i^*\right) \in \Pi$, которую назовем *образом* точки M_i^* при отображении f, с единственным требованием, что двум соседним точкам M_i^* и M_{i+1}^* (считаем $M_{n+1}^* = M_1^*$) соответствуют две разные точки $M_i \neq M_{i+1}$, а в общем точки M_i^* и M_j^*, $j \neq i+1$, могут иметь совпадающие образы. Соединим теперь точки M_i и M_{i+1} последовательно отрезками прямых; полученную ломаную P назовем *n-угольником* с вершинами в точках $M_1, \ldots, M_n$.

Очевидно, правило f сопоставления $M_i^* \to M_i$, $1 \leq i \leq n$, можно продолжить на всю окружность Г так, что получится непрерывное отображение $F: \Gamma \to \Pi$, совпадающее с f в точках M_i^* и переводящее дуги $M_i^* M_{i+1}^* \subset \Gamma$ в отрезки $M_i M_{i+1} \subset \Pi$, и таким образом многоугольник P можно трактовать как образ окружности Г при непрерывном отображении $F: \Gamma \to \Pi$, с требованием перехода данных дуг $M_i^* M_{i+1}^*$ в данные отрезки $M_i M_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$.

Построим в явном виде одно из таких возможных отображений F. Для этого введем на плоскости П декартову систему координат Oxy с началом в центре окружности Г и с положительным направлением оси Ox, идущим от центра к точке M_1^*. Тогда каждая точка M^* на окружности получит координаты $x^* = \cos\theta$, $y^* = \sin\theta$, где значения угла θ зависят от выбора направления обхода окружности. Для определенности всегда будем считать, что выбрано положительное направление обхода, так что $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Пусть точка M_i – образ точки M_i^* с координатами $x_i^* = \cos\theta_i$, $y_i^* = \sin\theta_i$ – имеет координаты (x_i, y_i). Тогда отображение F на дуге $M_i^* M_{i+1}^*$ можно задать уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x_i + \phi(\theta)\left(x_{i+1} - x_i\right), \\ y &= y_i + \phi(\theta)\left(y_{i+1} - y_i\right), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\phi(\theta)$ – произвольная непрерывная и монотонно возрастающая функция на $\left[\theta_i, \theta_{i+1}\right]$, с условием $\phi(\theta_i) = 0$, $\phi(\theta_{i+1}) = 1$, а текущие значения θ определяются из координат точек M^* дуги $M_i^* M_{i+1}^*$, изменяющихся от M_i^* до M_{i+1}^*. Например, простейшей такой функцией является функция $\phi(\theta) = \dfrac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}$.

Упражнения

1. Проверьте, что при изменении θ от θ_i до θ_{i+1} точки M с координатами (x, y) из (1) действительно заполняют отрезок $M_i M_{i+1}$, начиная с M_i и заканчивая M_{i+1} (рис.3).

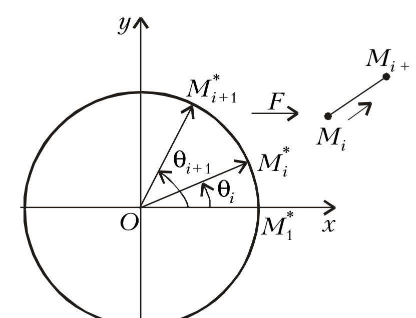

Рис.3

2. Покажите, что если вместо точек $M_i^* \in \Gamma$ взять вершины $N_1^*, \ldots, N_n^*$ правильного n-угольника Q, вписанного в Г, то можно так подобрать новое отображение $G: \Gamma \to \Pi$ с $G(N_i) = M_i$, $1 \leq i \leq n$, чтобы в образе получился прежний многоугольник P.

3. Покажите, что можно найти отображение $H: Q \to \Pi$, с $H(N_i) = M_i$, линейное на каждой стороне $N_i N_{i+1}$ многоугольника Q и переводящее ее в соответствующую сторону $M_i M_{i+1}$ многоугольника P.

Теперь нам нужно определить, сумму каких углов многоугольника мы намерены искать. Для этого мы