Следовательно, последнее число окажется хорошим, и второй игрок выиграет.

16. а) Поскольку прямая KL параллельна, а прямая MN перпендикулярна биссектрисе угла B треугольника, то $\angle MXL = 90°$. Обозначим $a = BC$ и $b = AC$. Как известно, длины AL и BM равны полупериметру треугольника ABC. Поэтому середины отрезков ML и AB совпадают, причем $ML = AL + BM - AB = a + b$. Пусть D – середина AB (и ML), E – середина AC. Так как DX – медиана прямоугольного треугольника MXL, то $DX = ML/2 = (a+b)/2$ и $\angle MDX = 2\angle MLX = \angle ABC$. Значит, прямая DX параллельна стороне BC и, следовательно, содержит среднюю линию DE. Значит, $EX = DX - DE = (a+b)/2 - a/2 = b/2 = EC$. Так как $EX \| BC$, то $\angle CEX = \angle ACB$, откуда $\angle ECX = \left(180^\circ - \angle ABC\right)/2 = \angle ACN/2$, что и требовалось доказать.

17. Эта задача в несколько иной формулировке (суммы вместо произведений) предлагалась в 1963 году на третьей Всероссийской математической олимпиаде (см. книгу Н.Б.Васильева и А.А.Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад»). Решение можно получить, доказав по индукции, что произведение n различных натуральных чисел имеет не меньше $\frac{n(n-1)}{2}+1$ делителей. Интересно, что оценка $\frac{n(n-1)}{2}+1$ точная: она достигается для числа $N = p^{n(n-1)/2} = 1 \cdot p \cdot p^2 \cdot \ldots \cdot p^{n-1}$, где p – простое число.

19. Докажите, что ситуация, в которой любой ход ведет к проигрышу, может возникнуть только после хода второй авиакомпании.

20. Будем называть дополнительной клеткой уголка не принадлежащую ему клетку покрывающего его квадрата 2×2. Построим последовательность уголков, начав с любого уголка и выбирая каждый следующий так, чтобы он покрывал дополнительную клетку предыдущего. Рано или поздно эта последовательность зациклится. Все 111 уголков не могут входить в цикл, ибо количество уголков в цикле четно. (Чтобы доказать это, рассмотрите ломаную с вершинами в центрах квадратов 2×2, содержащих уголки.) Осталось убрать уголки, не входящие в цикл.

21. Предположим, что сумма чисел диагонали меньше 1. Тогда в каждой строке найдется клетка, в которой стоит число, большее, чем число, стоящее на пересечении вертикали, содержащей эту клетку, с главной диагональю. Такие клетки будем называть хорошими. Выберем любую клетку на главной диагонали и пойдем из нее по горизонтали в хорошую клетку, затем по вертикали снова на диагональ, затем опять в хорошую клетку, и т.д. Через некоторое время этот маршрут зациклится. Рассмотрим образовавшийся цикл. Поставим ладьи на главную диагональ, а затем каждую ладью, попавшую в цикл, сдвинем по вертикали на предыдущую в этом цикле клетку. Ясно, что ладьи по-прежнему не бьют друг друга. Но при этом число под каждой из сдвинутых ладей увеличилось, значит, и произведение чисел под ладьями увеличилось, что противоречит условию задачи.

22. Отразив ортоцентр H относительно L, получим точку H', лежащую на описанной окружности и диаметрально противоположную точке B. Отрезок $H'B$ перпендикулярен прямой l. Поэтому проекция точки L на прямую l есть середина отрезка между проекциями точек H' и H, а стало быть, она совпадает с серединой отрезка BK, что и значит, что треугольник BKL – равнобедренный.

23. Абсолютная величина горизонтальной проекции вектора скорости для каждого шарика постоянна и не превосходит 1 (равенство достигается, если шарик летает горизонтально). Следовательно, время между двумя последовательными ударами одного шарика о левую стенку не меньше 2. Поэтому есть промежуток между двумя последовательными ударами шариков о левую стенку длительностью не меньше 1 (равенство достигается лишь в случае, когда оба шарика летают горизонтально и в противофазе).

В случае, когда нашелся такой промежуток длительностью больше 1, паучок успевает спуститься по вертикали, достаточно близкой к левой стенке. Если же шарики летают горизонтально и среднюю вертикаль пересекают одновременно, то паучок может спуститься по средней вертикали.

Интересно было бы найти минимальную скорость, с которой должен двигаться паучок, если в квадрате летают не два, а n шариков.

Московская студенческая олимпиада по физике

1. $v = \sqrt{(3L/4)g\cos\alpha + (g\tau\sin\alpha)^2}$.

2. $\alpha = \arccos(2/3) = 48^\circ$ (при вращении вектора в сторону стенки $\alpha = 0$).

3. Если зонд быстро замедляет свое движение и по эллиптической орбите приближается к Солнцу, то $v_{\text{хар}} = 0{,}57v_0$; если же зонд, быстро увеличив скорость, удаляется на расстояние, много больше R_0, а затем, замедлив движение, по эллиптической орбите приближается к Солнцу, то $v_{\text{хар}} = 0{,}41v_0$.

4. $F = 6Mg\mu\left(1+2\mu+3\mu^2\right)$.

5. $M = 7p_0S/(3g)$.

6. $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$.

7. $v = \sqrt{v_0^2 + Q^2/(12\pi\varepsilon_0 Rm)}$.

8. $L_{12} = L/\sqrt{2}$.

9. $\eta = 1 - (2/3)\ln 5/\left(5^{2/3} - 1\right)$.

10. $n = 3D^2/(16F\lambda)$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области

Заказ №