

которых составляет 0,005 Гц. Чему равна разность длин стержней δl ?

д) Считая длину стержня равной l , получите алгебраическое выражение для изменения длины стержня Δl , появляющегося вследствие изменения ускорения свободного падения g на величину Δg . Изменение вектора $\Delta \vec{g}$ происходит в направлении только одного из стержней. Выразите ваш ответ через l и параметры материала стержня.

е) Лазер испускает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 656$ нм. Полагая, что минимальный сдвиг торца, который может быть зарегистрирован, равен длине волны излучения лазера, определите, какая минимальная длина стержня необходима, чтобы установка смогла зарегистрировать изменение гравитационного поля на величину порядка 10^{-19} Н/кг.

В. В этой части задачи изучаются эффекты влияния гравитационного поля на распространение света в пространстве.

а) Фотон, излучаемый с поверхности Солнца (масса Солнца M , радиус R), испытывает красное смещение. Поставив в соответствие энергии фотона эквивалентную массу покоя, воспользуйтесь теорией тяготения Ньютона и покажите, что наблюдаемая на бесконечности частота фотона уменьшается в $(1 - GM/(Rc)^2)$ раз (красное смещение).

б) Уменьшение частоты фотона эквивалентно увеличению его периода. Если использовать фотон в качестве эталонных часов, то уменьшение частоты эквивалентно замедлению времени. Далее можно показать, что замедление времени всегда сопровождается сокращением единицы длины во столько же раз. Рассмотрим влияние этого эффекта на распространение света вблизи Солнца. Вначале определим эффективный показатель преломления в точке, находящейся на расстоянии r от центра Солнца. Пусть $n_r = c/c'$, где c – скорость света, измеренная в системе координат, достаточно удален-

ной от гравитационного влияния Солнца ($g \rightarrow \infty$), c' – скорость света, измеренная в системе координат на расстоянии r от центра Солнца. Покажите, что для $GM/(Rc)^2 \ll 1$ показатель преломления можно аппроксимировать выражением $n_r = 1 + \alpha GM/(rc)^2$, где α – коэффициент, который вы должны определить.

с) Используя выражение для n_r , вычислите в радианах угол отклонения луча света θ от прямолинейного пути при его прохождении вблизи края Солнца. Используйте следующие данные: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг², $M = 1,99 \cdot 10^{30}$ кг, $R = 6,95 \cdot 10^8$ м, $c = 3,00 \cdot 10^8$ м/с. Вам также может пригодиться такой интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин, В.Орлов

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Первый (районный) тур

1. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D , а луч CA – в точке E . Докажите, что $AD < EA$. (8–9)¹

С.Берлов

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A – прямой, E – точка пересечения диагоналей, F – проекция E на сторону AB (рис.1). Докажите, что углы DFE и CFE равны. (9)

С.Берлов

3. Последовательность вещественных чисел x_1, x_2, x_3, \dots удовлетворяет равенству

$$x_{n+2} = \frac{x_n x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}}$$

¹ В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.

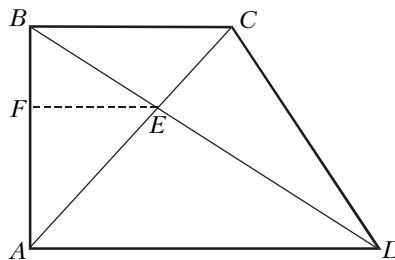


Рис. 1

при всех натуральных n . При этом $x_{2000} = x_1$. Докажите, что $x_{1999} \neq x_2$. (10)

С.Иванов

4. Функция f задана при всех вещественных x и удовлетворяет неравенствам

$$f(x+1) \leq f(2x+1)$$

и

$$f(3x+1) \geq f(6x+1).$$

Известно, что $f(3) = 2$. Докажите, что

уравнение $f(x) = 2$ имеет по крайней мере 2000 решений. (11)

А.Храбров

Второй (городской) тур

5. Десятичная запись числа $5 \cdot a$ состоит из 1000 пятерок и 1000 шестерок. Найдите сумму цифр числа a . (6)

Р.Семизаров

6. а) Во дворе стоят 36 столбов, причем первоначально любые два столба были соединены проводом. Каждое утро хулиган Вася по дороге в школу срывает не более 35 проводов, а электрик Петров каждый вечер восстанавливает все провода, связывавшие один из столбов с остальными. Докажите, что Вася может действовать так, что однажды после его хулиганства останется не более 17 целых проводов. (6)

б) В стране 2000 городов. Любые два города соединены двусторонней бес-