О пользе вневписанных окружностей

Ю.БИЛЕЦКИЙ, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

Вневписанная окружность представляется в некотором смысле изысканным элементом геометрии треугольника. Знакомство с ней зачастую ограничивается определением, нахождением ее центра и решением нескольких популярных задач, встречающихся на конкурсных экзаменах. Однако, как нам кажется, «взяв правильный угол сердца» (В.Хлебников) к вневписанной окружности, мы увидим в ней скрытую красоту и силу, станем рассматривать ее как подспорье в решении геометрических задач.

Вневписанная окружность

Теорема 1. *Биссектриса внутреннего угла BAC треугольника ABC и биссектрисы двух внешних углов при вершинах B и C пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Проведем внешние биссектрисы из вершин B и C. Пусть они пересекаются в точке J_a (рис.1). Докажем, что биссектриса угла BAC проходит через точку J_a. Все точки биссектрисы равноудалены от сторон угла, значит, расстояния от точки J_a до прямых BC и AC равны, так как J_a лежит на биссектрисе угла BCT_1. Аналогично, равны расстояния от точки J_a до прямых BC и AB. Тогда очевидно, что точка J_a равноудалена от прямых AC и AB, т. е. лежит на биссектрисе угла BAC.

Из теоремы 1 следует, что существует окружность с центром в точке J_a, касающаяся прямых AC, AB и BC.

Определение. *Вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.*

Отметим, что для каждого треугольника существуют три вневписанные окружности, их радиусы будем обозначать r_a, r_b и r_c в зависимости от того, какой стороны треугольника они касаются.

Теорема 2. *Пусть T_1 – точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны AC треугольника ABC. Тогда длина отрезка AT_1 равна полупериметру треугольника ABC (см. рис.1).*

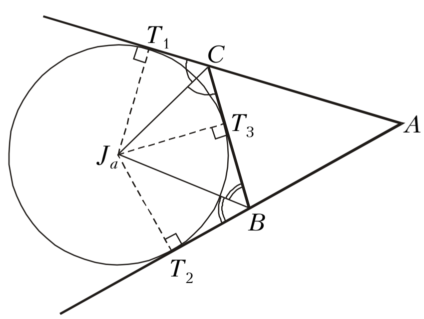

Рис. 1

Доказательство. Пусть T_2 и T_3 – точки касания вневписанной окружности с прямыми AB и BC соответственно. Тогда $CT_1 = CT_3$, $BT_2 = BT_3$ и периметр треугольника ABC равен $2p = AC + CT_3 + BT_3 + AB = AC + CT_1 + AB + BT_2 = AT_1 + AT_2$. А так как $AT_1 = AT_2$, то $p = AT_1$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Площадь S треугольника ABC равна $S = r_a(p - a)$.*

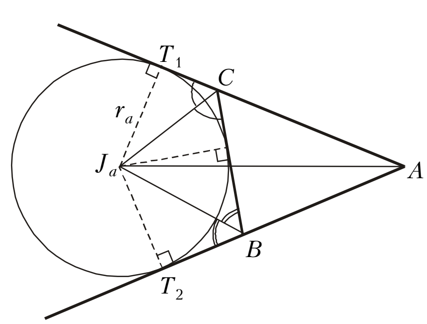

Рис. 2

Доказательство. Легко видеть (рис.2), что

$$S = S_{ABC} = S_{J_aCA} + S_{J_aBA} - S_{J_aCB} = \frac{1}{2}r_ab + \frac{1}{2}r_ac - \frac{1}{2}r_aa = r_a(p-a).$$

Теорема 4. *Пусть K – точка касания вписанной окружности со стороной BC, KR – диаметр вписанной окружности. Тогда точки A, R и T_3 лежат на одной прямой (рис.3).*

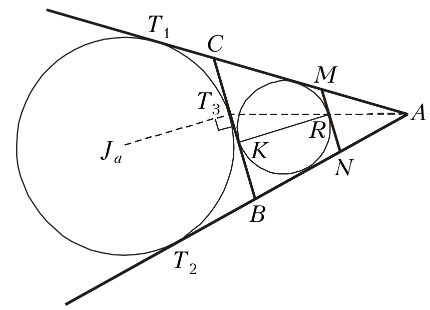

Рис. 3

Доказательство. Пусть прямая AR пересекает BC в некоторой точке X. Докажем, что X совпадает с T_3. Проведем через R прямую, параллельную BC. Обозначим ее точки пересечения с AC и AB через M и N соответственно. Окружность, вписанная в ΔABC, является вневписанной для ΔAMN. Но ΔABC и ΔANM гомотетичны. Следовательно, окружность, вневписанная в ΔABC, будет касаться BC в точке X. Таким образом, X совпадает с T_3.

Решение задач

Отметим, что условия следующих задач не содержат термина «вневписанная окружность». Она появляется в решении как вспомогательная фигура.

Задача 1. *На стороне BC треугольника ABC найдите точку, которая делит периметр треугольника ABC пополам.*

Ответ: это точка касания вневписанной окружности со стороной BC (см. доказательство теоремы 2).

Задача 2. *Из точки A к данной окружности проведены касательные AT_1 и AT_2. К окружности проведена касательная, пересекающая отрезки AT_1 и AT_2 в точках B и C. Докажите, что периметр треугольника ABC не зависит от положения касательной.*

Решение. По теореме 2, независимо от положения касательной, периметр треугольника ABC равен удвоенной длине отрезка AT_1.