PCA относятся как $1/(p-c) : 1/(p-a) : 1/(p-b)$, где p – полупериметр ΔABC, то

$$CP/CC' = (S_{ABC} - S_{ABP})/S_{ABC} =$$
$$= c(p-c)/\left((p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)\right).$$

Отсюда легко выводится, что

$$PZ \cdot PW = PX \cdot PU = PY \cdot PV,$$

т.е. точки X, U, Z, W лежат на одной окружности. Но $XYZW$ – равнобедренная трапеция, следовательно, точка Y лежит на той же окружности. Для точки V доказательство аналогично. Центр этой окружности лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам XY, ZU, VW, совпадающих с биссектрисами углов ΔABC, что доказывает пункт а).

Для доказательства пункта в) достаточно заметить, что отрезки CZ и CW равны, и следовательно, точка C лежит на радикальной оси окружностей PZU и PVW.

Другое решение можно получить с помощью инверсии: так как касательные к окружностям в точке P параллельны сторонам ΔABC, инверсия с центром в P переводит эти окружности в прямые, образующие треугольник, гомотетичный ΔABC относительно P. Радиус инверсии можно выбрать таким, чтобы коэффициент гомотетии равнялся –1. Тогда композиция этой инверсии и центральной симметрии с центром P будет менять местами точки X и U, Y и V, Z и W, а также точки A, B, C и вторые точки пересечения окружностей. Отсюда сразу следуют все утверждения задачи.

А.Заславский

М1748. *На плоскости выбраны 1000 точек общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой). Рассматриваются всевозможные раскраски этих точек в два цвета. Назовем раскраску неразделимой, если не существует такой прямой, что точки разных цветов лежат в разных полуплоскостях. Докажите, что число неразделимых раскрасок не зависит от выбора точек.*

Общая идея состоит в том, что мы будем искать не число различных неразделимых раскрасок, а число по-разному разделяющих прямых.

Назовем две прямые эквивалентными, если они разбивают множество выбранных точек на совпадающие непустые подмножества. Легко видеть, что это действительно отношение эквивалентности. Найдем число классов эквивалентности.

Для этого удобно представлять себе выбранные точки как бесконечно тонкие гвозди, торчащие из плоскости, а прямую – как палку, лежащую на плоскости (естественно, тоже бесконечно тонкую и прямую!). Начнем поворачивать палку по часовой стрелке, пока это возможно (палка не может проходить сквозь гвозди). Сначала поворачиваем вокруг любой точки прямой, пока не коснемся одного гвоздя. Потом поворачиваем ее вокруг этого гвоздя, пока не коснемся второго. Если эти два гвоздя в одной полуплоскости, то прямую можно поворачивать дальше вокруг второго гвоздя – при этом она уйдет от первого. Продолжаем поворачивать до следующего касания, и так далее…

Если два гвоздя в разных полуплоскостях, то они «зажали» прямую – дальше ее поворачивать нельзя. Таким образом, для каждой прямой мы получили некоторую пару выбранных точек. Очевидно следующее:

1) эквивалентным прямым соответствует одна и та же пара точек;

2) каждой паре точек соответствует некоторый класс эквивалентности прямых;

3) разным классам эквивалентности соответствуют разные пары точек.

Значит, классов эквивалентности столько же, сколько пар точек, т.е. $1000 \cdot 1001/2$. Они разделяют 1001000 раскрасок (каждая разделяет ровно две), и еще 2 раскраски (когда все точки одного цвета) разделяются любой прямой.

Г.Челноков

М1749. *Рассмотрим последовательность слов, первое из которых состоит из одной буквы А, второе – АБ, третье – АБА, четвертое – АБААБ, пятое – АБААБАБА, и так далее: очередное слово получаем из предыдущего, заменяя каждую букву А на АБ, а Б – на А.*

а) Докажите, что каждое слово этой последовательности, начиная с третьего, получается приписыванием предпредыдущего слова к предыдущему.

(Например, АБААБАБА – это АБААБ плюс АБА.)

б) Пусть $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $b_2 = 5$, $a_4 = 6$, $b_3 = 7$, $a_5 = 8$, $a_6 = 9$, $b_4 = 10$ и, вообще, пусть a_n и b_n – номера мест, на которых стоят n-е буквы А и Б в бесконечном слове АБААБАБААБААБАБА…, начальными отрезками которого являются слова пункта а). Докажите равенство $b_n = n + a_n$.

в) Рассмотрим другую последовательность слов: А, АБ, АБАА, АБАААБАБ, АБАААБАБАБАААБАА, … (Очередное слово получается из предыдущего заменой А на АБ, а Б – на АА.) Докажите, что каждое слово этой последовательности является началом следующего ее слова и что номер места, на котором в соответствующем бесконечном слове

АБАААБАБАБАААБАААБАААБАБАБАААБАБ…

стоит n-я буква Б, в два раза больше номера места, на котором стоит n-я буква А.

а) Обозначим: $w_1 = А$, $w_2 = АБ$, $w_3 = АБА$ и, вообще, $w_{n+1} = h(w_n)$, где h обозначает одновременную замену всех букв $А$ на $АБ$, а $Б$ на $А$. Мы должны доказать соотношение

$$w_{n+2} = w_{n+1}w_n.$$

Применим индукцию. При $n = 1$ утверждение верно: $w_3 = АБА = w_2w_1$.

Пусть мы знаем, что оно верно при некотором n. Тогда

$$w_{n+3} = h(w_{n+2}) = h(w_{n+1}w_n) = h(w_{n+1})h(w_n) = w_{n+2}w_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

б) Очевидно,

$$a_n = n + k,$$

где k – это количество букв $Б$, расположенных перед n-й буквой $А$. Далее, n-я буква $Б$ получается при операции h из n-й буквы $А$. Поскольку h преобразует каждую букву $А$ в две буквы ($А$ и $Б$), а каждую букву $Б$ – в одну букву ($А$), то

$$b_n = 2n + k.$$

Дальнейшее очевидно: $b_n - a_n = 2n + k - (n+k) = n$.