**М1744*.** *На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты $k$ различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые $k$ квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2k-2$ гвоздями.*

Докажем утверждение задачи индукцией по количеству цветов $n$.

*База*: $n=2$. Рассмотрим самый левый квадрат $K$. Если он первого цвета, то все квадраты второго цвета имеют с ним общую точку, следовательно, каждый квадрат второго цвета содержит одну из двух правых вершин квадрата $K$, значит, все квадраты второй системы можно прибить двумя гвоздями.

*Индукционный переход.* Пусть мы доказали утверждение задачи для $n$ цветов, докажем для $(n+1)$-го цвета. Рассмотрим все квадраты и выберем из них самый левый квадрат $K$. Пусть он покрашен в $(n+1)$-й цвет. Все квадраты, пересекающие $K$, содержат одну из двух его правых вершин, следовательно, их можно прибить двумя гвоздями. Уберем со стола все квадраты $(n+1)$-го цвета и квадраты других цветов, пересекающие $K$. Остались квадраты $n$ различных цветов. Нетрудно доказать, что если выбрать $n$ квадратов разных цветов, то среди них найдутся два пересекающихся. (В противном случае можно добавить квадрат $K$ и получить $n+1$ попарно не пересекающихся квадратов разных цветов, что противоречит условию задачи.) Таким образом, по индукционному предположению, можно выбрать один из цветов $i$ и прибить $2k-2$ гвоздями все оставшиеся на столе квадраты этого цвета. Убранные квадраты цвета $i$ пересекают самый левый квадрат $K$, следовательно, эти квадраты можно прибить, забив два гвоздя в правые вершины квадрата $K$.

*В.Дольников*

**М1745.** *В некоторых клетках доски $2n\times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более $n^2$.*

Заметим, что в конце никакие две разноцветные фишки не стоят ни в одной строке, ни в одном столбце. Действительно, если исходно черная фишка стояла в одном столбце с белой, то ее сняли в первый раз, а если после первого снятия белая фишка стоит в одной строке с черной, то ее сняли во второй раз.

Пусть в конце черные фишки стоят в $a$ строках и $b$ столбцах, тогда белые могут стоять не более чем в $2n-a$ строках и $2n-b$ столбцах. Но тогда черных фишек не более $ab$, а белых не более $(2n-a)(2n-b)$. Поскольку

$$ab(2n-a)(2n-b)=a(2n-a)b(2n-b)\le n^2\cdot n^2=n^4,$$

то либо черных, либо белых фишек осталось не более $n^2$.

*С.Берлов*

**М1746.** *На окружности находятся $n$ красных и $n$ синих точек, которые разделяют ее на $2n$ равных дуг. Каждая красная точка является серединой дуги окружности с синими концами. Докажите, что каждая синяя точка является серединой дуги окружности с красными концами.*

Пусть $A$ – произвольная синяя точка на окружности. Возможны два случая.

В первом случае точка $B$, диаметрально противоположная точке $A$, является тоже синей. Тогда среди хорд, перпендикулярных диаметру $AB$, найдется хорда $CD$ с красными концами. Иначе получилось бы, что синих точек на окружности больше, чем красных. В таком случае дуга $CAD$ имеет красные концы, а точка $A$ является серединой этой дуги.

Во втором случае точка $B$, диаметрально противоположная точке $A$, является красной точкой. Из условия следует, что найдется хорда с синими концами $MN$, перпендикулярная диаметру $AB$. Но тогда, ввиду баланса синих и красных точек на окружности, найдется хорда $CD$ с красными концами, перпендикулярная диаметру $AB$. Это означает, что дуга $CAD$ имеет красные концы, но точка $A$ является ее серединой.

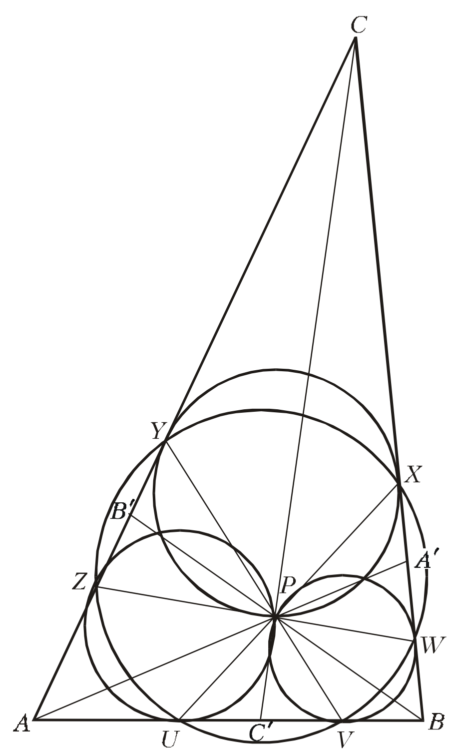
*В.Произволов*

**М1747*.** *Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается его сторон в точках $A'$, $B'$, $C'$. Через точку $P$ пересечения прямых $AA'$, $BB'$, $CC'$ проведены три окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Докажите, что*

*а) шесть точек касания образуют вписанный шестиугольник, причем центр описанной около него окружности совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник $ABC$;*

*б) главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в точке $P$;*

*в) вторые точки пересечения проходящих через $P$ окружностей лежат на прямых $AA'$, $BB'$, $CC'$.*




Пусть $U$, $V$, $W$, $X$, $Y$, $Z$ – точки касания окружностей со сторонами треугольника $ABC$ (см. рисунок). Из условия задачи следует, что окружности $PZU$, $PVW$, $PXY$ гомотетичны вписанной окружности треугольника $ABC$ с центрами гомотетий $A$, $B$, $C$ и коэффициентами $AP/AA'$, $BP/BB'$, $CP/CC'$ соответственно. Отсюда сразу следует, что отрезки $A'B'$, $XY$, $PZ$, $PW$ параллельны, что доказывает пункт б). Так как площади треугольников $PAB$, $PBC$,