Как это можно выразить? Одна из возможностей такова. Некоторые функции трех переменных можно задать как суперпозицию функций двух переменных; скажем, так: $f(x,\ y,\ z) = \varphi(x,\ \psi(y,\ z))$. (Например, функция $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ является суперпозицией функций $u \to u^2$ и $v \to \sqrt{v}$ одного переменного и функции сложения двух переменных.) Уверенный в том, что функции трех переменных не должны сводиться к функциям двух переменных, Гильберт в своей 13-й проблеме придал вопросу наиболее острую форму. Он выбрал одну определенную алгебраическую функцию трех переменных (именно, функцию, являющуюся решением полиномиального уравнения $(x,\ y,\ z) \to w^7 + xw^3 + yw^2 + zw + 1 = 0$) и спрашивал: *нельзя ли ее выразить суперпозицией* ***непрерывных*** *функций двух переменных* (полагая, что ответ должен быть отрицательным)? А он оказался положительным.

История решения 13-й проблемы Гильберта чрезвычайно занимательна. Весной 1956 года А.Н.Колмогоров объявил на механико-математическом факультете МГУ спецсеминар для второкурсников, где начал обсуждать некоторые проблемы, имея в виду в отдаленной перспективе приблизиться к решению 13-й проблемы Гильберта. В этом семинаре принял участие второкурсник Дима Арнольд (так друзья называли в студенческие годы Владимира Игоревича). В нем он выполнил свою первую научную работу. Семинар проходил лишь в течение одного семестра, на нем было получено несколько интересных результатов, но проблема Гильберта виделась лишь в бесконечной дали. Однако уже после завершения семинара А.Н.Колмогорову несколько неожиданно даже для самого себя довелось сконцентрировать колоссальный импульс энергии на решении именно этой проблемы. В итоге примерно двухнедельного периода напряженнейших размышлений Колмогоров доказал, что *всякая непрерывная функция четырех переменных является суперпозицией функций трех переменных*. Об этом результате Колмогоров докладывал на III Всесоюзном математическом съезде летом 1956 года. Завершить эти исследования Колмогоров предоставил своим последователям.

Прошло примерно полгода, и както весной 1957 года я оказался у Андрея Николаевича на его даче. Андрей Николаевич показал мне на ученическую тетрадь, на обложке которой было написано: «Курсовая работа студента III курса В.Арнольда». Колмогоров сказал: «Я сейчас проверяю эту работу, но не исключено, что в ней содержится решение 13-й проблемы Гильберта». Так оно и оказалось. Если соединить решения Колмогорова и Арнольда, то получится одно из самых сложных доказательств, когда-либо найденных в математике.

Но на этом история не закончилась. Летом 1957 года Колмогорову удалось усилить результат Арнольда и доказать следующую теорему: *любая непрерывная функция n переменных (заданная на единичном n-мерном кубе) представима в виде суперпозиции функций одного переменного и единственной функции двух переменных — сложения.*

Сформулируем более точно этот результат в применении к функциям двух переменных.

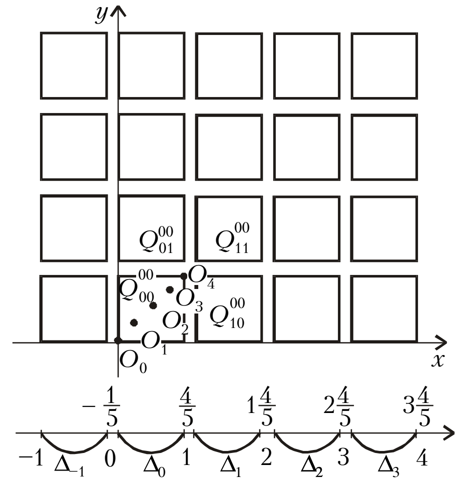
Пусть f — непрерывная функция двух переменных, заданная на единичном квадрате $Q = \{(x,\ y) \mid 0 \le x,\ y \le 1\}$. Тогда она представима в виде

$$f(x,\ y) = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(\varphi_i(x) + \psi_i(y)),$$

где φ_i, ψ_i и χ_i — непрерывные функции одного переменного.

Доказательство общей теоремы, относящейся к функциям n переменных, вполне иллюстрируется двумерным случаем. Приведем эскиз доказательства сформулированной выше двумерной теоремы. Оно складывается из трех этапов.

1. Построение системы квадратов. Рассмотрим на прямой систему S_1 единичных отрезков $\{\Delta_i\}_{i\in \boldsymbol{Z}}$, разделенных интервалами длины $1/5$. Далее на плоскости рассмотрим декартово произведение системы S_1 на самое себя (т.е. совокупность пар $(x,\ y)$, где $x \in \Delta_i$, $y \in \Delta_j$, $i, j \in \boldsymbol{Z}$). Получили как бы план города с горизонтальными и вертикальными проспектами одинаковой ширины (см. рисунок). Обозначив начало координат буквой O_0, рассмотрим еще точки O_k, $1 \le k \le 4$, с координатами $(k/4,\ k/4)$. Сдвинем теперь изначальный план города четыре раза так, чтобы начальные точки совпали с точками O_k, $1 \le k \le 4$. И наконец, совершим l раз подряд гомотетии всей картины с коэффициентом гомотетии γ. В итоге получим систему квадратов Q_{ij}^{kl}, $i, j \in \boldsymbol{Z}$, $0 \le k \le 4$, $l \in \boldsymbol{Z}_+$. Построение системы квадратов закончено.



2. Построение функций φ_k и ψ_k. Эти функции не зависят от приближаемой функции f. Основное требование на эти функции состоит в том, чтобы функции $\Phi_k(x,\ y) = \varphi_k(x) + \psi_k(y)$ разделяли любые два квадрата из l-й системы квадратов, т.е. чтобы сегменты $\Phi(Q_{ij}^{kl})$ и $\Phi_k(Q_{i'j'}^{kl})$ при $(i, j) \ne (i', j')$ не пересекались.

Сделаем лишь первый шаг в построении наших функций, которые будем определять на всей плоскости. Мы имеем нулевую систему квадратов Q_{ij}^{00}, состоящую из квадратов со стороной $4/5$, у которой «начальный» квадрат имеет вершиной начало координат. Построим непрерывную функцию $\Phi_i^0(x,\ y)$, представимую в виде суммы двух функций одного переменного $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(y)$, которая разделяет квадраты Q_{ij}^{00}. Квадрат Q_{ij}^{00} является произведением двух отрезков: Δ_i на оси Ox и Δ_j на оси Oy. Сделаем так, чтобы значения функции $\varphi^0(x)$ на квадрате Q_{ij}^{00} мало отличались от целого числа i, а значения функции $\psi^0(y)$ на том же квадрате мало отличались от числа $\sqrt{2}j$. Иначе говоря, включим точки i в сегменты $[i - \varepsilon_i,\ i + \varepsilon_i]$, а точки $\sqrt{2}j$ в сегменты $[\sqrt{2}j - \eta_j,\ 2\sqrt{j} + \eta_j]$ так, чтобы интервалы

$$\delta_{ij}^{00} = \left[i - \varepsilon_i + \sqrt{2}j - \eta_j,\ i + \varepsilon_i + \sqrt{2}j + \eta_j\right]$$

не пересекались. А далее функции $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(x)$ достроим по линейности. Это и есть первый шаг, за которым индуктивно, но сходным образом, надо последовательно достраивать наши функции.

3. Завершение доказательства (построение функции χ_k). И снова сделаем лишь один шаг индуктивного построения. Пусть на единичном квадрате Q нам задана функция $f(x,\ y)$, а $M = \max\limits_{(x,y)\in Q} |f(x,\ y)|$. Построим функции