Материалы вступительных экзаменов 2000 года

Московский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-2000», март)

1. Решите неравенство

$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}.$$

2. О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 51. Найдите седьмой член этой прогрессии.

3. Найдите все корни уравнения

$$\cos x \sin\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\sin x + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} - \frac{9}{20} = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi\right]$.

4. Перпендикуляр к боковой стороне AB трапеции $ABCD$, проходящий через ее середину K, пересекает сторону CD в точке L. Известно, что площадь четырехугольника $AKLD$ в пять раз больше площади четырехугольника $BKLC$, $CL = 3$, $DL = 15$, $KC = 4$. Найдите длину отрезка KD.

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{a-x} - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^a - \frac{8}{5}\right) \times \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3} - 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} + 2\right) = 0$$

имеет хотя бы одно решение и каждое его решение является целым числом?

6. Вершины квадрата $PQRS$ со стороной $25/4$ лежат на сфере. Параллельные друг другу прямые проходят через точки P, Q, R и S и повторно пересекают сферу в точках P_1, Q_1, R_1 и S_1 соответственно. Известно, что $PP_1 = 2$, $QQ_1 = 10$, $RR_1 = 6$. Найдите длину отрезка SS_1.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$2\sqrt{5\cdot 6^x - 2\cdot 9^x - 3\cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

3. Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй – со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за 8 часов движения автобусы

а) встретятся в пункте B,

б) окажутся в одном месте строго между пунктами A и B,

если известно, что первый стартует из пункта A, а второй из пункта B?

4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$. Найдите длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

5. Найдите все a, при которых уравнение

$$(|a|-1)\cos 2x + (1-|a-2|)\sin 2x + (1-|2-a|)\cos x + (1-|a|)\sin x = 0$$

имеет нечетное число решений на интервале $(-\pi; \pi)$.

6. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что плоскости треугольников ASC и BSD перпендикулярны друг другу. Найдите площадь грани ASD, если площади граней ASB, BSC и CSD равны 5, 6 и 7 соответственно.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2000», апрель)

1. Решите неравенство

$$\left|\left|x^2 - 8x + 2\right| - x^2\right| \ge 2x + 2.$$

2. Решите уравнение

$$12^x + 6^x - 2\cdot 4^x - 2\cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0.$$

3. Найдите все решения неравенства

$$\sqrt{6 - 10\cos x - \sin x} < \sin x - \cos x,$$

принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $CD = \sqrt{13}$ и $\sin\angle ACD : \sin\angle BCD = 4 : 3$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $\angle ACB = 120°$, площадь треугольника MCN равна $3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой. Найдите площадь треугольника ABC.

5. Для каждого значения параметра a найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 3y\log_2\left(4x^2 + (14a-10)x + 8a - 8\right) + 2\log_4^2\left(4x^2 + (6-2a) + 4a^2 - 8a + 4\right)^2 = 0, \\ 5y^2 - 8y\log_4\left(4x^2 + (6-2a)x + 4a^2 - 8a + 4\right)^2 + 3\log_2^2\left(4x^2 + (14a-10)x + 8a - 8\right) = 0 \end{cases}$$

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = 15\sqrt{2}$, $BC = 20$, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен $5\sqrt{5}$. На сторонах треугольника ABC как на диаметрах построены три сферы, пересекающиеся в точке O. Точка O является центром четвертой сферы, причем вершина пирамиды S является точкой касания этой сферы с некоторой плоскостью, параллельной плоскости основания ABC. Площадь части четвертой сферы, которая заключена внутри трехгранного угла, образованного лучами OA, OB и OC, равна 8π. Найдите объем пирамиды $SABC$.

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\sin x \sin|x| \geq -\frac{1}{2}.$$

2. Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора одного литра воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора тридцатью девятью литрами воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найдите концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 литра воды равной 1 кг.

3. Решите неравенство

$$\log_{5-4x-x^2}\left(5-9x-2x^2\right) \leq \log_{1-x}(1-2x).$$

4. На боковых ребрах AA_1, BB_1 и CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) расположены точки K, L и M соответственно. Известно, что угол между прямыми KL и AB равен $\frac{\pi}{4}$, а угол между прямыми KM и AC равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки K, L и M, и плоскостью основания ABC.

5. Найдите наибольшее значение выражения

$$4x^2 + 80x + y + 43$$

при условии, что

$$6x^2 + 32x + y + 283 \leq 0$$

и

$$x^2 + 86x + y + 202 \geq 0.$$

6. Вершины A и C параллелограмма $ABCD$ лежат на одной окружности, а вершины B и D – на другой, причем центры окружностей лежат в плоскости параллелограмма. Длины диагоналей параллелограмма равны 6 и 2 соответственно. Расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ до прямой, проходящей через точки пересечения окружностей, равно 2. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Вариант 5

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2000», март)

1. Решите уравнение

$$\sin 5x + \sin 2x = \sin 7x.$$

2. Решите уравнение

$$3^{\sqrt{x}-1} - 10 \cdot 3^{-\sqrt{x}-1} = 1.$$

3. Решите неравенство

$$2x^2 + \sqrt{2x^3} > x.$$

4. В ΔABC, в котором AD – медиана, $AD = m$, $AB = a$, $AC = b$. Найдите $\angle BAC$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\log x + \log_{\sqrt[3]{5}} y = 3, \\ \log_5(y-x-2) + \log_{125}(y-x+2)^3 = \\ \qquad\qquad = \log_5 12. \end{cases}$$

6. В правильной треугольной пирамиде высота равна 3, а объем равен $9\sqrt{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

7. При каких значениях b уравнение

$$25^x - (2b+5)5^{x+\frac{1}{x}} + 10b \cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два решения?

8. Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN – в точке P; $AB : BC = 2 : 3$. Найдите $AP : PC$.

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$3\cos 3x + \frac{2}{\cos x} = 3\cos x.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{3x-2}{x-1} + 3\log_8 \frac{(x-1)^3}{3x-2} < 1.$$

4. На стороне AC треугольника ABC взята точка A_1, а на продолжении стороны BC взята точка C_1 (C между B и C_1), длина отрезка A_1C равна 85% длины стороны AC, а длина отрезка BC_1 равна 120% длины стороны BC. Сколько процентов площади ΔABC составляет площадь ΔA_1BC_1?

5. Решите уравнение

$$3 \cdot \left|3^{x-1} - 2\right| + \left|9^{\frac{x}{2}} - 3\right| = 3.$$

6. В ΔABC точка O – центр описанной окружности, $AB = a$, $AC = b$. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.

7. При каких значениях a неравенство

$$\left(x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a\right)\sqrt{1-x} \leq 0$$

имеет единственное решение?

8. Высота конуса равна 6, радиус основания равен 3. Точка A находится на расстоянии 3 от оси конуса и на расстоянии 4 от плоскости основания конуса. Прямая AB имеет с конусом единственную общую точку C и пересекает плоскость основания конуса в точке B. Расстояние от точки C до плоскости основания конуса равно 2. Найдите расстояние от точки B до вершины конуса.

Вариант 7

(химический факультет и факультет наук о материалах)

1. Решите уравнение

$$|x| = 2 - x.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0.$$

3. Две бригады рабочих мостили два участка дороги (первая бригада – первый участок, вторая – второй), причем объем работ на втором участке был вдвое больше, чем на первом, а в первой бригаде было на 10 рабочих меньше, чем во второй. Производительность труда всех рабочих одинакова. Бригады одновременно начали работу, и когда первая бригада закончила работу, вторая еще работала. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде?

4. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите сумму длин второй и третьей окружностей, если радиус первой равен 1, а площадь круга, ограниченного четвертой окружностью, равна 64π.

5. Треугольники DAB, DAC, DBC, представляющие собой боковые грани треугольной пирамиды, имеют одинаковые площади. Точка A_1 лежит на ребре DA, причем $DA_1 = \frac{2}{5}DA$, точка B_1 лежит на ребре DB, причем $DB_1 = \frac{5}{6}DB$, точка C_1 лежит на ребре DC. Известно, что площадь боковой поверхности пирамиды $DA_1B_1C_1$ составляет $\frac{47}{90}$ от площади боковой поверхности пирамиды $DABC$. Какую часть объема пирамиды $DABC$ составляет объем пирамиды $DA_1B_1C_1$?

6. Решите уравнение

$$\left(26+15\sqrt{3}\right)^x - 5\left(7+4\sqrt{3}\right)^x + 6\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 5.$$

Вариант 8

(биологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{2-3x}{x+2} \le 5.$$

2. Решите уравнение

$$3\cos 2x + 4 + 11\sin x = 0.$$

3. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $AC = 4$, $BC = 8$. Точка D лежит на стороне AB, а точка E – на стороне AC, причем $AD = 2$, $AE = 3$. Найдите площадь треугольника ADE.

4. Решите неравенство

$$\log_4\left(16(x-2)^2\right)\cdot\log^2_{\frac{1}{16}}\frac{(x-2)^4}{64} - \frac{5}{4}\log_{64}\left(x^3-6x^2+12x-8\right)^2 \le \frac{15}{2}.$$

5. Внутри правильной треугольной призмы со стороной основания a лежат три шара одинакового радиуса, каждый из которых касается двух других шаров, двух боковых граней и обоих оснований призмы. Четвертый шар касается трех вышеупомянутых шаров и верхнего основания призмы. Найдите радиус четвертого шара.

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{3-2x} \le 1.$$

2. Первый, второй и четвертый члены арифметической прогрессии одновременно являются первым, вторым и третьим членами соответственно некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.

3. Найдите $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \text{ а } \sin 4\alpha > 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2.$$

5. Решите уравнение

$$\sin\left(\pi\sqrt{8-x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

6. Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника окружностью, отличных от вершин исходного треугольника. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны 30°, 60° и 90°, а его площадь равна 2. Найдите площадь нового треугольника.

7. Найдите все значения параметра a, при которых при любых значениях параметра b уравнение

$$|x-2| + b|2x+1| = a$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(5x-4) \le 8.$$

2. Вычислите $\operatorname{tg}2x$, если

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{5}.$$

3. От причала A к причалу B отплыли катер и лодка, причем скорость катера в 5 раз больше скорости лодки. Известно, что они плыли с постоянными скоростями, но катер сделал несколько остановок. Сколько времени катер затратил на все остановки, если он доплыл до причала B за 2 часа, а лодка за 4 часа?

4. Решите неравенство

$$4\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x \le 3.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 30, \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$$

6. В трапецию с основаниями 3 и 5 можно вписать окружность и около нее можно описать другую окружность. Вычислите площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, ее меньшим основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.

7. Решите уравнение

$$2\left(2-x^2-x\right) = \sqrt{1-x^2}\cdot\left(3x^2-6x+4\right).$$

8. В прямоугольном параллелепипеде, стороны основания которого a и b, а высота a, расположены 9 шаров. Восемь из них одинакового радиуса, причем каждый касается трех граней параллелепипеда и двух соседних шаров. Девятый шар внешним образом касается всех восьми вышеуказанных шаров. Найдите R – радиус девятого шара. Установите, при каких значениях величины $\frac{b}{a}$ задача имеет решение, если $R \le \frac{a}{4}$.

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x+2} = 2x - 4.$$

2. Решите уравнение

$$|2x+8| - |x-5| = 12.$$

3. Аэронавт совершил кругосветное путешествие вокруг Земли на воздушном шаре, двигаясь вдоль заданной параллели на постоянной высоте. Оказалось, что разность расстояний, пройденных верхней и нижней точками шара, вдвое превосходит диаметр шара. На какой широте совершалось это путешествие?

4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{1+3x-x^2}\right)\right)$$

при условии $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \ge \frac{\pi}{6}$.

5. Из пункта $А$ в пункт $Б$ вниз по течению притока отправляется катер, скорость которого в стоячей воде равна v. В пункте $Б$, где приток впадает в реку, катер поворачивает к пункту $В$, расположенному вверх по течению реки. Расстояния от $А$ до $Б$ и от $Б$ до $В$ равны. Скорости течения притока и реки равны u_1 и u_2 соответственно. На координатной плоскости $(u_1; u_2)$ укажите область, для всех точек которой время движения по маршруту $А \to Б \to В$ меньше, чем время, которое затратил бы катер на прохождение такого же расстояния в стоячей воде.

6. Даны функции

$$f(x, y) = |y| + 2|x| - 2$$

и

$$g(x,\, y,\, a) = x^2 + (y - a)(y + a).$$

а) При каком наименьшем положительном значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} f(x,\, y) = 0, \\ g(x,\, y,\, a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения?

б) При этом значении параметра a найдите площадь фигуры, координаты $(x;\, y)$ всех точек которой удовлетворяют неравенству

$$\frac{f(x,\, y)}{g(x,\, y,\, a)} \le 0.$$

Вариант 12

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Имеется 40 литров 0,5%-го раствора и 50 литров 2%-го раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5%-го раствора уксусной кислоты?

2. Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC, N лежит на AC). Найдите периметр четырехугольника $ABMN$, если известно, что $AB = 5$, $MN = 3$.

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} \le 2.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнения

$$(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0$$

и

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

имеют общий корень.

6. Расшифруйте шифровку

$$\begin{pmatrix} * & + & * & = & Л \\ - & & \times & & .. \\ * & + & * & = & О \\ || & & || & & || \\ Д & : & У & : & Б \end{pmatrix}.$$

Про шифровку известно, что в ней
1) буквы и звездочки означают цифры;
2) разные буквы означают разные цифры;
3) звездочки могут означать любые цифры.

Вариант 13

(отделение экономики экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$3\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 4 - x = \left(\sqrt{-x^2 + x + 2}\right)^2.$$

2. Интервалы движения морских катеров по трем маршрутам, начинающимся на общей пристани, составляют 30, 36 и 45 минут соответственно. Сколько раз с $7^{\underline{40}}$ до $17^{\underline{35}}$ того же дня на этой пристани одновременно встречаются катера всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в $11^{\underline{15}}$?

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_7 12}{\log_7 (x^2 - 9)} \ge \frac{\log_5 (x^2 + 8x + 12)}{\log_5 (x^2 - 9)}.$$

4. Точка Q расположена на стороне MN треугольника LMN так, что $NQ : QM = 1 : 2$. При повороте этого треугольника на некоторый угол вокруг точки Q вершина L переходит в вершину N, а вершина M – в точку P, лежащую на продолжении стороны LM за точку L. Найдите углы треугольника LMN.

5. Найдите все значения x, при которых числа

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos\left(5x + \frac{3\pi}{4}\right)},$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$5^{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

6. Центр шара с радиусом 1 совпадает с основанием высоты правильной четырехугольной пирамиды. Найдите площадь той части поверхности пирамиды, которая лежит вне этого шара, если высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а плоские углы при вершине пирамиды равны $\arccos\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

7. Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\dfrac{1}{6};\, 6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 f(x) - \dfrac{1}{2}} - 12\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{10}{x}, \\ 0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решите неравенство $f(x) \le \dfrac{\pi}{8}$.

Вариант 14

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$4x \sin 3x = 3x + |x|.$$

2. Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен десяти, сумма второго и третьего членов – целое число, кратное четырем, и не превосходит одной тысячи, а знаменатель больше единицы. Укажите знаменатели всех таких прогрессий.

3. Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспашет одно поле втрое быстрее, чем второй, а третьему трактору на эту же работу потребуется времени на два часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за семь часов двенадцать минут. Найдите наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все трактора начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любому трактору требуется сорок минут.

4. Решите неравенство

$$2 + \log_{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \frac{x + 4}{x + 1} \ge \log_{(x^2 - 2x - 3)} \left(x^2 - 2x - 2\right)^2.$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник со сторонами $AB = AC = 5$ и $BC = 6$. Ребро SA перпендикулярно основанию пирамиды. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды, если известно, что отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к ребру SA равно $\dfrac{2}{7}$.

Вариант 15

(факультет социологии)

1. Решите уравнение

$$\left|x^2 - 3x\right| = 2x - 4.$$

2. В городе N в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найдите процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста населения за два года.

3. Решите неравенство

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}>\frac{1}{2x+3}.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{11-8\cos^4 x-4\sin x\cos x}=3\sin x+\cos x.$$

5. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с радиусом 2. Угол $\angle DAB$ прямой. Сторона AB равна 5, сторона BC равна 6. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых отношение решений квадратного уравнения

$$\left(a^2+1\right)x^2+4x+\frac{1}{a+1}=0$$

является целым числом. Кратные корни учитываются дважды.

Вариант 16

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$|2x-1|>\frac{1}{x-2}.$$

2. Определите радиус окружности, если вписанный в нее угол со сторонами, длины которых равны 1 и 2, опирается на дугу 120°.

3. Решите уравнение

$$3\sin 2x-\frac{1}{2}=4\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

4. Решите неравенство

$$(4-x)^{x^2-9}-\sin^2 10^\circ<(4-x)^{\frac{1}{\log_{\cos 10^\circ}\sqrt{4-x}}}.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left|x^2-2x+a\right|>5$$

не имеет решений на отрезке $[-1; 2]$.

6. Определите сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на n и $n+5$ соответственно.

7. В треугольной пирамиде $ABCD$ угол между гранями ABC и ACD равен $\frac{\pi}{4}$, плоский угол BAC равен $\frac{\pi}{6}$, а ребра AC и AD перпендикулярны. Найдите длину ребра BD, если $AB=2$, $AD=\sqrt{2}$.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. На цилиндрическую часть катушки радиусом r, лежащей на столе, намотана легкая нерастяжимая нить, отрезок AB которой горизонтален (рис.1). В момент времени $t=0$ точку нити A начинают тянуть с постоянным горизонтальным ускорением a. При этом катушка начинает двигаться без проскальзывания так, что ее ось не изменяет своей ориентации. Через какое время длина горизонтального участка нити изменится в n раз, если длина отрезка AB была L_0, а внешний радиус катушки R?

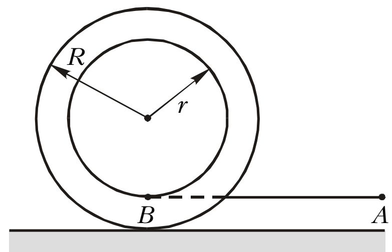

Рис. 1

2. На горизонтальной крышке стола лежит однородный куб массой m, к середине верхнего ребра которого прикреплена легкая нить. Коэффициент трения куба о крышку μ, причем $\mu<0{,}5$. С какой минимальной силой, направленной перпендикулярно указанному ребру, нужно тянуть за нить, чтобы куб начал поворачиваться без скольжения? Каково направление этой силы?

3. В цилиндрическом сосуде с внутренним радиусом R, частично заполненном водой, плавает, выступая из воды на высоту h, однородное деревянное кольцо (рис.2). Радиус отверстия в кольце r. В отверстие медленно налили столько масла, что его верхний уровень достиг верха кольца. В результате уровень воды вне кольца поднялся на некоторую высоту x. Найдите x, если плотность масла $\rho_м$ меньше плотности воды $\rho_в$, а плотность дерева $\rho_д$ больше плотности масла.

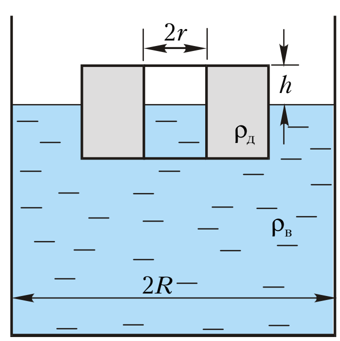

Рис. 2

4. Прямоугольный сосуд разделен на две равные части гладким толстым поршнем, ось которого горизонтальна. Левая часть сосуда длиной L полностью заполнена ртутью, при этом ртуть практически не оказывает давления на верхнюю грань сосуда. В правой части сосуда находится воздух. Пренебрегая тепловым расширением сосуда, поршня и ртути, а также давлением насыщенных паров ртути, найдите перемещение поршня при медленном уменьшении абсолютной температуры сосуда с содержимым в $n=1{,}5$ раза. Считать, что при конечной температуре ртуть остается жидкой.

5. На pV-диаграмме, изображенной на рисунке 3, показано изменение состояния одного моля идеального одноатомного газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя. Отношение максимальной абсолютной температуры газа к его минимальной температуре в данном цикле равно $n=4$. Во сколько раз отличается КПД η этого цикла от максимально возможного при заданном значении n?

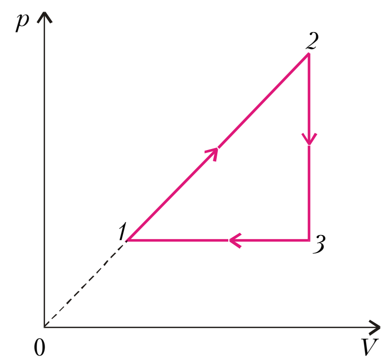

Рис. 3

6. Какую минимальную мощность должен потреблять мотор морозильника, работающего по циклу Карно, в камере которого поддерживается температура $t_1=-23$ °С, если в нее через стенки поступает $Q=0{,}1$ МДж тепла за время $\tau=1$ ч? Температура радиатора морозильника $t_2=57$ °С, а КПД мотора $\eta_м=0{,}8$.

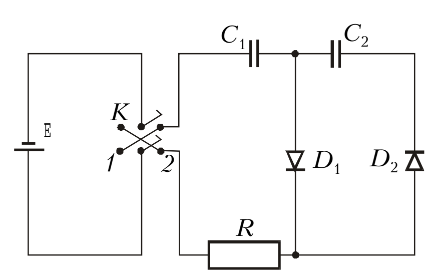

Рис. 4

7. В схеме, показанной на рисунке 4, все конденсаторы разряжены, а двойной ключ K находится в разомкнутом состоянии. Его перевели в положение *1*, а затем, спустя достаточно большое время, в положение *2*. Параметры элементов схемы даны на рисунке. Считая диоды идеальными, найдите заряд, который установится на конденсаторе емкостью C_2.

8. Плоскую рамку, состоящую из небольшого числа N витков тонкого провода, вращают вокруг горизонтальной оси, лежащей в плоскости рамки, с угловой скоростью ω в однородном вертикальном магнитном поле. Концы обмотки замкнуты накоротко, а ее общее сопротивление равно R. Пренебрегая индуктивностью обмотки, найдите величину B индукции магнитного поля, если площадь каждого витка S, а для поддержания вращения к рамке необходимо прикладывать в среднем момент сил $M_{\text{ср}}$.

9. Диск радиусом R из льда с показателем преломления $n = 1{,}3$ разрезали по диаметру. Перпендикулярно плоскости разреза на одну из половин диска направили узкий параллельный пучок света, который вышел параллельно падающему пучку на некотором расстоянии L от него. Найдите расстояние L, если интенсивности падающего и выходящего пучков почти одинаковы.

10. Точечный источник S, дающий свет с длиной волны λ, помещен в главный фокус собирающей линзы. За линзой находится призма, склеенная из двух стекол с показателями преломления n_1 и n_2 $(n_1 > n_2)$. Ось линзы

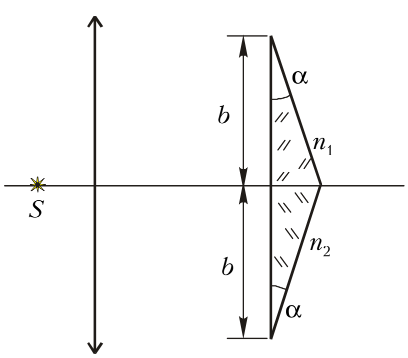

Рис. 5

проходит по границе раздела стекол и перпендикулярна к передней грани призмы (рис.5). Размер передней грани призмы $2b$ меньше диаметра линзы. Преломляющие углы призмы малы: $\alpha \ll 1$ рад. Найдите максимальное число интерференционных полос, которые можно наблюдать на экране, расположенном перпендикулярно оси линзы за призмой.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Автомобиль трогается с места с ускорением $a_1 = 2$ м/с^2. При скорости $v = 50$ км/ч ускорение автомобиля стало равным $a_2 = 1$ м/с^2. С какой установившейся скоростью v_0 будет двигаться автомобиль, если сила сопротивления пропорциональна скорости? Силу тяги двигателя при движении автомобиля считать постоянной.

2. Маленькое тело соскальзывает без начальной скорости по внутренней поверхности полусферы с высоты,

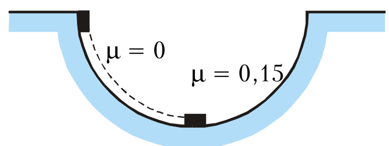

Рис. 6

равной ее радиусу (рис.6). Одна половина полусферы абсолютно гладкая, а другая – шероховатая, причем на этой половине коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu = 0{,}15$. Определите ускорение a тела в тот момент, как только оно перейдет на шероховатую поверхность. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

3. На двух гвоздях, вбитых в стену в точках A и B (рис.7), повешена веревка. Расстояние между гвоздями

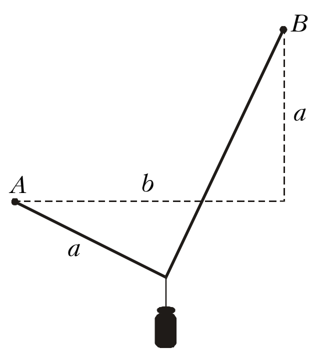

Рис. 7

по горизонтали $b = \sqrt{3}$ м $\approx 1{,}73$ м, разность высот, на которых вбиты гвозди, $a = 1$ м, длина веревки равна $a + b$. На веревке на расстоянии a от точки A подвешивают груз, который не касается стены. Найдите отношение α сил натяжения веревки слева и справа от груза. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Веревку считать невесомой и нерастяжимой.

4. В лифте, движущемся с ускорением, равным $a = 5$ м/с^2 и направленным вверх, находится цилиндрический сосуд, закрытый поршнем массой $M = 20$ кг и площадью $S = 100$ см^2. Под поршнем находится идеальный газ. Поршень расположен на расстоянии $h = 22$ см от дна сосуда. Определите, на какую величину Δh переместится поршень, если лифт будет двигаться с тем же по модулю ускорением, но направленным вниз. Температура газа не изменяется. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь.

5. В закрепленном под углом $\alpha = 60°$ к горизонту цилиндре может без трения двигаться поршень массой $M = 10$ кг и площадью $S = 50$ см^2 (рис.8).

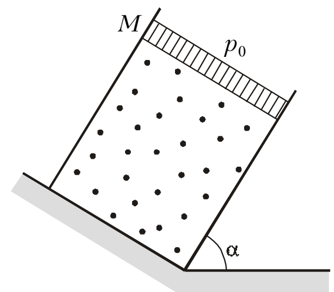

Рис. 8

Под поршнем находится одноатомный идеальный газ. Газ нагревают так, что поршень перемещается на расстояние $l = 5$ см. Какое количество теплоты Q было сообщено газу? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

6. Два удаленных друг от друга на большое расстояние металлических шара радиусами $r_1 = 5$ см и $r_2 = 10$ см, несущие заряды $q_1 = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = -10^{-9}$ Кл соответственно, соединяют тонким проводом. Какой заряд q протечет при этом по проводу?

7. Два маленьких шарика массами $m_1 = 6$ г и $m_2 = 4$ г, несущих заряды $q_1 = 10^{-6}$ Кл и $q_2 = -5 \cdot 10^{-6}$ Кл соответственно, удерживают на расстоянии $l = 2$ м друг от друга. В некоторый момент оба шарика отпускают, сообщив второму скорость $v_0 = 3$ м/с, направленную от первого шарика вдоль линии, соединяющей их центры (рис.9). На какое максимальное расстояние L разойдутся шарики друг от друга? Силу тяжести не учитывать. Электрическую

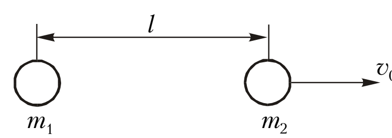

Рис. 9

постоянную принять равной $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$ Ф/м.

8. Катушка индуктивностью $L = 3$ мГн подключена к двум последовательно соединенным конденсаторам (рис.10). Конденсатор емкостью $C_1 = 10^{-7}$ Ф вначале заряжен до напряжения $U = 150$ В, а конденсатор емкостью $C_2 = 3 \cdot 10^{-7}$ Ф разряжен. Чему

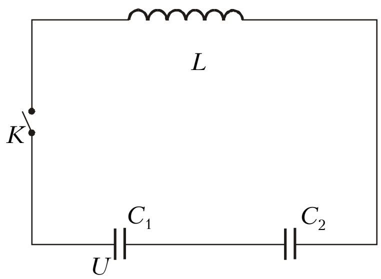

Рис. 10

будет равна максимальная сила тока I_{max} в этой цепи после замыкания ключа K?

9. Две призмы с одинаковыми углами при вершине $\alpha = 5°$, но имеющие разные показатели преломления, плотно прижаты друг к другу и расположены, как показано на рисунке 11. При

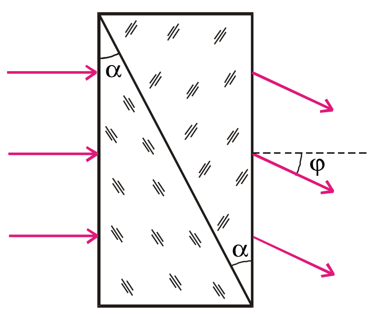

Рис. 11

освещении призм параллельным пучком света, падающим нормально на переднюю грань системы, оказалось, что вышедший из нее пучок отклонился от первоначального направления на угол $\varphi = 3°$. Найдите разность Δn показателей преломления материалов призм. При расчетах положить $\sin\alpha = \alpha$ и $\sin\varphi = \varphi$.

10. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см. По другую сторону линзы на расстоянии $b = 80$ см от нее находится экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. Известно, что если переместить экран на расстояние $a = 40$ см в сторону линзы, то размер пятна света, создаваемого источником на экране, не изменится. Определите расстояние d от источника света до линзы.

Химический факультет

1. Два груза одинаковой массы $m = 0,5$ кг связаны легкой нитью и движутся вертикально вверх под действием силы F, приложенной к одному из грузов. Нить обрывается при величине силы $F_1 \geq 20$ Н. При какой силе F_2 разорвется нить, если нижний груз закрепить?

2. При выстреле из пушки вылетает снаряд, скорость которого направлена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Пушка за счет отдачи откатывается в горизонтальном направлении с начальной скоростью $v = 0,5$ м/с. Масса пушки без снаряда $M = 800$ кг. Найдите изменение импульса Δp системы пушка – снаряд в результате такого выстрела. Трением пренебречь.

3. Двое рабочих должны выкопать колодец глубиной $H = 8$ м. До какой глубины h следует копать первому рабочему, чтобы работа оказалась распределенной поровну? Сечение колодца одинаково по глубине. Принять $g = 10$ м/с^2.

4. В двух баллонах объемами $V_1 = 25$ л и $V_2 = 50$ л находится влажный воздух при одной и той же температуре. Относительная влажность воздуха в первом баллоне $\varphi_1 = 40\%$, а во втором $\varphi_2 = 20\%$. Какой будет относительная влажность φ, если баллоны соединить трубкой и дождаться установления равновесия? Температуру считать постоянной.

5. Рабочим телом тепловой машины является один моль одноатомного идеального газа. Циклический процесс работы машины представлен на рисунке 12. Он состоит из адиабатного

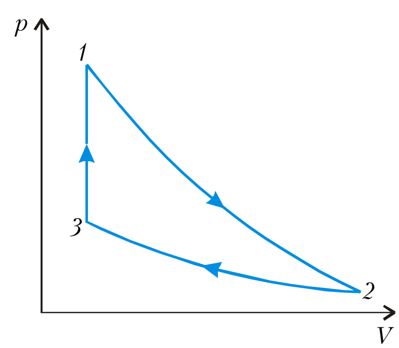

Рис. 12

расширения *1–2*, изотермического сжатия *2–3* и изохорного процесса *3–1*. При этом ее КПД $\eta = 20\%$, а работа, совершаемая над газом в процессе изотермического сжатия, $A = 25$ Дж. Найдите разность ΔT максимальной и минимальной температур газа в цикле. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).

6. Параллельно отклоняющим пластинам электронно-лучевой трубки влетает поток электронов, движущихся со скоростью $v_0 = 6 \cdot 10^6$ м/с. Через промежуток времени $\tau = 5 \cdot 10^{-10}$ с их скорость оказывается равной $v = 1 \cdot 10^7$ м/с. Считая, что поле между пластинами однородно, определите по этим данным его напряженность. Удельный заряд электрона $e/m = 1,8 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

7. К клеммам источника постоянного тока, замкнутого на нагрузку с сопротивлением $R = 8$ Ом, подключен конденсатор. Если конденсатор включить в эту цепь последовательно, то заряд на его обкладках окажется больше в $k = 1,5$ раза. Найдите внутреннее сопротивление источника r.

8. Протон, ускоренный электрическим полем, попадает в магнитное поле и движется по дуге окружности радиусом $R = 0,3$ м. При этом вектор скорости протона изменяет свое направление, поворачиваясь на угол $\Delta\varphi = 45°$ за время $\Delta t = 10^{-7}$ с. Найдите ускоряющую разность потенциалов U. Заряд протона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

9. Оптическая сила лупы $D = +12,5$ дптр. На каком расстоянии d от лупы надо поместить предмет, чтобы увидеть изображение, увеличенное в $\Gamma = 4$ раза?

10. Катод фотоэлемента облучается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм. Энергия светового потока, падающего на катод за время $\Delta t = 10$ с, равна $W = 0,15$ Дж. Определите силу тока насыщения I фотоэлемента при таком освещении. Заряд электрона $e = 10^{-19}$ Кл. Постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Публикацию подготовили П.Бородин, В.Воронин, Н.Григоренко, Е.Григорьев, И.Ломов, Г.Медведев, В.Погожев, В.Разгулин, И.Сергеев, А.Склянкин, В.Ушаков, С.Чесноков, Е.Шикин, Б.Щедрин